

河川を遡上する津波に対する KdV-Burger 方程式の解析解

Analytical Solution of the KdV-Burger's Equation
as a Solution of a Stream-up Form of a Tsunami along a River都司 嘉宣
Yoshinobu TSUJI

1. はじめに

河口から川へ津波が侵入した後、波状段波として河口から津波が遡上する様子が観察されることがある。例えば、1983 年に秋田県西方沖の海域に発生した日本海中部地震 (M7.7) によって発生した津波は、能代港の港内に侵入した (Tsuji et al., 1991, 千田ら, 2014, 千田 2018)。千田 (2018) には、このときの津波が、波状段波の形をとって遡上進行している写真映像が紹介されている。安田ら (2004) は 2003 年 9 月 26 日の十勝沖地震による津波が十勝川、釧路川、沙流川、および鵠川での河川遡上の報告をしている。特に、十勝川河口では、ソリトン分裂をした波状段波が観察され、陸上自衛隊北部方面隊によって、ヘリコプターから見た写真映像が撮影された。安田 (2006) はこの津波の河川遡上について、数値解析による再現を試みている。さらに、安田 (2007) は、水理室内実験によって、波状段波を再現、観察している。千田ら (2013, 2014) は、非線形モデルにより CIP 法を応用して、川を遡上する津波が多数のソリトン波に分裂する現象をモデル化し、室内実験結果で検証した。

また、2011 年の東日本大震災 (M9.0) による津波が、北上川、気仙川、大槌川をはじめ多数の川へ遡上したことについて、阿部 (2015) が詳しく報告している。

以上、実際の津波の観測記録からも明らかのように、河口から侵入して川を遡上する津波の形状は、水面の高さが単一のステップ状に急変する単一の「段波, Strong Bore」の形状を取ることもあり、あるいは、いくつもの波が連なった「波状段波, Undular Bore」の形状を保って遡上していくこともある (図 1 に模式図)。

津波などが河川を遡上する現象は段波と呼ばれ、水理学の教本では、ダムの下流側に生ずる跳水現象 (Hydraulic Jump) が川の上流に向かって移動したのと同様な現象として説明されるのが常である。すなわち、上流側水位 h_1 、下流側水位 h_2 、上流側の流水速度 u_1 を与えて、下流側流水速度 u_2 、および段波の移動速度 c の 2 個の未知数を求める問題として解かれる。この問題は、水の流量が上流側と下流側で等しいと置いた式 (質量保存

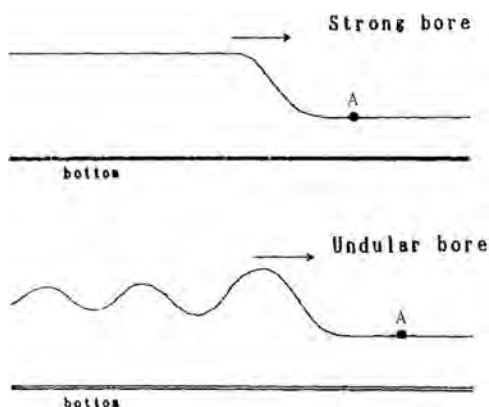


図 1 川を遡上する強い段波 (上図 strong bore) と波状段波 (undular bore)

の式), および, 下流側水圧, マイナス上流側水圧の差が水の運動量の差に等しい, という運動量変化の式の, 二つの式から得られる。

上述の 2 個の未知数は, この 2 個の式を連立することによって, 解くことができる。段波の移動速度 c は, この連立方程式を解いた結果, 次の公式によって決定することができる。

$$c = \sqrt{\frac{gh_2(h_1+h_2)}{2h_1}} - u_1$$

しかし, この議論は一見完結しているように見えても, 段波の本質については何も言っていないことには注意する必要がある。

本稿では, 河川を遡上する津波が, 非線形性と分散性を考慮した孤立波を記述する KdV (Korteweg-de-Vries) 方程式に水の粘性 (分子粘性, あるいは渦粘性) によるエネルギーの散逸を表現する項を加味した, KdV-Burger 方程式に従うとして, その解析解を求めることによって, そのふるまいを論ずることとした。本稿の理論的議論は, Johnson (1970, 1972) によって提案されたものである。

本稿の方法は津波の伝播研究で多く用いられている, 計算格子を設定して行う津波のシミュレーション手法とは本質的に異なり, 数学的手法によって解析解を求める試みである。

筆者ら (Tsuji et al., 1991) は, 今から 35 年前に, 津波遡上に関する小規模な室内実験の検証にこの手法を開発したが, この手法によって得られる成果の全般にわたる提示, さらに, 解析的方法によって得られた結論グラフから, 実際に起きている津波現象に戻して, その結果の解釈について行うべき議論については, 少々欠けるところがあった。本稿では, この点に留意して執筆した。

なお, 本稿で論じた理論的出発点となっている KdV 方程式とその解である孤立波 (soliton) については, 19 世紀末にすでに確立された議論であるが, 現在の大学の土木工学, あるいは地球科学の分野に在籍する流体力学の基礎の知識をすでに習得した学徒各位に, 一か所の思考のジャンプもなく KdV 方程式に到達していただくことを希望して, Appendix

にこの議論を詳述した。学徒各位に「結論だけわかればいい, 途中の議論はどうでもいい」というタイプの理工学者にはなっていないと希望するからである。

2. 津波の河川遡上を記述する KdV-Burger 方程式とは

2.1 水深一定の海, 水路を進行する津波の挙動を表す KdV 方程式

津波は, 水平方向の大きさ (震源のサイズと同程度, 数十 km) が, それが伝わる海や河川の水深 (D と書く, 最大 6km 程度) に比べておおむね 20 倍以上であるのが普通であるので, 海洋波浪の中でも「長波」に分類される。その伝わる速度 c_0 は, $c_0 = \sqrt{gD}$ で計算することができる。

しかしながら, 津波が海岸近くの浅い海域や, 河口から川に侵入したような場合には, 波の高さ (a) 自身が, 水深 (D) に匹敵する (たとえば, a が D の数分の一程度) 場合には, 非線形性 (有限振幅性) と分散性をともに考慮しないと, 現実とは合致しなくなる。

水面の平均位置に原点 O を取り, 鉛直上方に y 軸を取る。水深 D が一定の水域を, 一方向 (この方向を x 座標とする) に伝わるこのような波の水面形を $y = \eta(x, t)$ とすると, η は次の (1) 式で表わされる「津波の KdV 方程式」に従う。

$$\eta_t + c_0 \eta + \frac{3}{2} \frac{c_0}{D} \eta \eta_x + \frac{1}{6} c_0 D^2 \eta_{xxx} = 0 \quad (1)$$

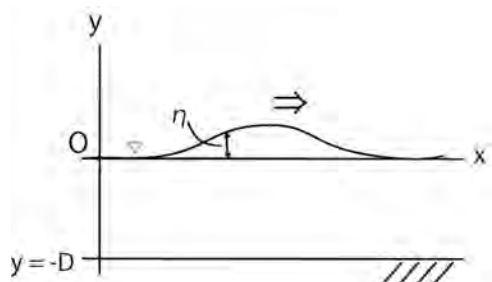


図2 有限振幅で, 分散性のある津波の式 (KdV 方程式) を導く座標系

注：流体力学の基本式からこの式を導く過程については、本稿の Appendix を参照のこと。

この式で、 η は海面の上下変位量、 D は水深で、一定であると仮定する。 c_0 は（線形）長波の速度に等しく $c_0 = \sqrt{gD}$ である。

KdV 方程式 (1) の第 2 項までは、長波の式である。第 3 項は非線形の効果を表す項で、第 4 項は、波の分散性を表す項である。水深 D に対して波高 a が十分に小さい場合には、第 3 項と第 4 項は無視することができるが、河口から川に侵入した津波のように、そうではない場合には、第 3 項、および第 4 項の影響をとともに考慮する必要がある。

2.2 KdV-Burger の方程式

前項で述べた、KdV 方程式の解では、波の進行とともにエネルギーは保存される。ところが本稿で取り扱おうとしている波は、水深一定の河川（水路）に侵入する段波については、エネルギーは失われるはずであるから、KdV 方程式のままでは、そのふるまいを表す解は得られない。そこで、河口から侵入して河川を遡上する津波のふるまいを説明するには、何らかのエネルギーを消失させる項が方程式の中に入っていないとてはならない。

そこで、粘性による影響を加えた KdV 方程式系を考える。粘性（分子粘性）を考慮した運動方程式は、NS（Navier-Stokes, NS, ナビエストークス）の式と呼ばれるが、この NS 式を非線形項は無視し、流速は水平成分 u のみを残し、高次微小項である鉛直流速 v を無視すれば次のようになる。

$$u_t = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} - \nu u_{xx} \quad (2)$$

ここで ν (ニュー) は動粘性係数であって、 $\nu = \mu / \rho$ (μ : 分子粘性係数, ρ : 密度) である。

この式から出発して、粘性の影響を考慮した KdV 方程式を導くと、次の KdV-Burger の式が得られる (Johnson, 1970, 1972)。

$$\eta_t + c_0 \eta + \frac{3}{2} \frac{c_0}{D} \eta \eta_x + \frac{1}{6} c_0 D^2 \eta_{xxx} = R \eta_{xx} \quad (3)$$

ここで、 R は次の形をとる。

$$R = Q \nu L^2 / D^2$$

この式で、通常の海洋波浪の場合、 L は波長、 D は水深で、 Q はある定数である。Chester (1966) によると、Poiseuille (ポアズユ) の流れ（定常層流）の場合、 Q は次の値をとるとされている。

$$Q = (1 - \frac{2F^2}{3}) / 3 \quad (4)$$

ここで、 F は一種の Froude (フルード) 数で、 U を Bore の速度として、 $F = U / \sqrt{gD}$ で与えられる。

しかし、定常層流が実現するのは、数センチメートル以下の机上で行われるような小規模の室内実験の範囲内での流れの場合（主として境界層内）に限られ、実際の津波の物理的な規模を考えれば、これを構成する流れの場合が定常層流ということはあるにない。すなわち、(3) 式の右辺の減衰項 $R \eta_{xx}$ は、分子粘性から算出される値より、はるかに大きな乱流による渦粘性が支配すると考えられる。そこで、まず (3) 式の R の値は、「分子粘性よりけた違いに大きな、渦粘性を表すある一定の定数である」、とだけ仮定して先に進むことにしよう。

2.3 KdV-Burger の式の正規化表示

本節では、現実の世界の尺度で記載された (3) 式を、より一般的に扱うために、この式の正規化を試みる。

そこで、川を遡上する津波 (Bore) を表す KdV-Burger の式 (3) に対して、次の変数変換を行う。すなわち、(3) 式の右辺第 4 項の係数について、これを β と置く。すなわち、

$$\beta = \frac{c_0 D^2}{6} \quad (5)$$

とする。

さらに、(3) 式の第 3 項の係数を 1 とするために、水位を表す従属変数 η を次のように ξ に変換する。

$$\xi = \left(\frac{3c_0}{2D}\right)\eta \quad (6)$$

さらに (3) 式の最初の 2 項を 1 つにまとめるために、独立変数 (x, t) に対して次の変換を行い、独立変数として (z, τ) を用いることにする。

$$z = \beta^{-1/2}(x - c_0 t), \quad \tau = \beta^{-1/2}t \quad (7a), (7b)$$

この変換は、津波の河川内の遡上速度に近い c_0 の速度で上流に向かって走る自動車に乗って現象を観察しているのに等しい。この場合、自動車に乗った観測者は、「ほとんど止まって見える、波形変化のゆっくしりた津波（段波）」の姿を観察することになる。

$\beta^{-1/2}$ は、現実の世界の x 方向、および時間 t を KdV 方程式を正規化するために導入する係数であるが、この係数自体は(長さ) $^{-3/2} \times$ (時間) $^{1/2}$ という奇妙な物理的次元をもった数であることに注意を要する。

さらに (3) 式の右辺の係数に次の変換をほどこす、すなわち

$$\delta = \beta^{-1/2}R \quad (8)$$

とする。以上 (5) ~ (8) の変換の結果、(3) 式は、次のような正規形の KdV-Burger 式に帰着する。

$$\xi_\tau + \xi\xi_z + \xi_{zzz} = \delta\xi_{zz} \quad (9)$$

この式の左辺には、いっさい可変な係数変数（パラメータ）はなく、式全体として、可変パラメータは、粘性などによるエネルギー損失を表すパラメータ δ のみである。 $\delta = 0$ の場合は、粘性によるエネルギー損失がない場合であって、ソリトン（孤立波）の繰り返しの解が出てくることが予想され、この場合には、河口から段波が川に侵入する今の問題の解は与えないと予想される。

以下 (9) 式を「正規化された KdV—Burger 方程式」と呼ぶことにしよう。

2.4 正規化された KdV-Burger 方程式の常微分方程式表示

(9) 式は、3 次の偏微分方程式であるため、このままでは数値的に解析解を求めるのは困難である。そこで、原方程式 (9) の次数を

1 階下げするために「相平面法」を用いることを考える。

今、川の上流側の水面標高 ξ の値をゼロ、河口（海）側の無限遠 ($z = -\infty$) 側では津波の侵入によって水位が上昇して、負側の無限遠で $\xi = \xi_\infty$ になっていたとする。

Johnson (1970, 1972) に従って、(9) 式の 2 個の独立変数 (z, τ) に対して、次の変換をほどこすと、独立変数はただ 1 個 T に減らすことができる。

$$T = \frac{\left(\frac{z - \xi_\infty \tau}{2}\right)}{\sqrt{8/\xi_\infty}} \quad (10)$$

この変換によって独立変数は 1 個となる。この立場は、 (z, τ) 面上で、速度が $\xi/2$ の右に移動する（第二の）自動車に乗って現象を観察すると、波形は止まって見えるということ想定している。

さらに、従属変数 ξ 、および、拡散係数のパラメータ δ に対して次の変換をほどこす。

$$V = \xi/\xi_\infty, \quad p = 2\delta\sqrt{2/\xi_\infty} \quad (11), (12)$$

基本式 (9) に対してこれら (10) ~ (12) の変換をほどこした結果、最終的に次の 2 階常微分方程式を得る。

$$V_{TT} + 4V(V-1) = pV_T \quad (13)$$

ここで、ただ一つ現れるパラメータ p は、粘性（あるいはエネルギーの散逸係数）を表す量である。

2.5 相平面法による式 (13) の解析解を求める「相平面法」

前項の (13) 式は津波の河川遡上のさいの水面の形状について、非線形性、分散性、およびエネルギーの散逸を考慮した基本式である。この (13) 式は、2 階の常微分方程式であるが、まだこのままでは解析的には解くことはできない。そこで、Poincare (ポアンカレ) の「相平面法」によって、数値解析的に (13) 式を解くことを考える。

すなわち、(13) 式の水面の変動を表す独立変数 V を、水平座標 T で微分した変数 $W (=dV/dT)$ を考え、(13) 式から T を消去し、 (V, W) のみで表現した式を作ると、次の

式 (14) が得られる。

$$dW/dV = \{pW - 4V(V-1)\}/W \quad (14)$$

式 (14) の解を表す 1 本の曲線 (解曲線) を, 平面 (V, W) 上に表示することを考えよう。このような平面は一般に相平面 (phase plane) と呼ばれる。相平面には 2 次元の軸が取られるが, 時間に相当する軸は相平面上には表示されないことに注意したい。

(14) 式のような常微分方程式の解を表す 1 本の曲線は解曲線 (trajectory, あるいは orbit) と呼ばれる。

(14) 式の右边は, (V, W) 平面上で, (0, 0) および (1, 0) の 2 点で, 分母, 分子ともゼロとなるから, この 2 点が「特異点」となる。この 2 つの特異点のうち, 原点 (0, 0) は鞍状点 saddle point となり, ここが 1 本の解曲線の出発点となる。もう一方の (1, 0) の点は螺旋 (らせん) 状収束点 (Spiral point) となり, 解曲線はこの点の周りを周回しつつ, 最終的にはこちらの螺旋状収束点に到達する。ただし, Johnson (1970) によると, $p > 4.0$ の場合にはこの点は螺旋状収束点にはならない, とされる。(この点, 本稿の筆者は未検証)。

式 (14) について, $p=0.0$, および $p=1.0$

に対する解曲線の概略を図 3 に示す。 $p=0.0$ の解曲線は, 理論的に (1.5, 0) の点を通して原点 (0, 0) に戻ってくると証明されている。

$0.0 < p < 4.0$ の場合には, 原点を出発した解曲線は, (1, 0) 点の周囲を螺旋状に周回して, 最終的にこの点に収束・到達する。

2.6 p の値を与えたときの解曲線の描き方

それでは次に, 任意の p の値を与えた場合に, 式 (14) を満たす相平面 (V, W) 上の解曲線を求める具体的な方法を述べよう。

解曲線は, 必ず相平面 (V, W) の原点 $O(0, 0)$ を出発点とする。点 P を, 解曲線の上の点であって, かつ原点 $O(0, 0)$ に極めて近接した点とする。その水平軸 (V -軸) となす角を θ とすると, 次の式がほぼ成り立っているはずである。

$$dW/dV = W/V = \tan \theta \quad (15)$$

一方, この式は, (14) 式の右边と等置することによって, 次の式を得る。

$$\tan \theta = p + 4/\tan \theta \quad (16)$$

この式は, $\tan \theta$ に関する 2 次式であるから, p を与えれば, 次のように解くことができる。

$$\tan \theta = \left\{ \pm \sqrt{p^2 + 16} - p \right\} / 2 \quad (17)$$

幾何学的な考察から原点 O から発する解曲線の初動方向は負方向を取るのが合理的である (後述) ので, この式の $\pm$ 符号は, マイナスの方を採用する。

今回採用した計算プログラムでは, 原点 $O(0, 0)$ を最初に踏み出した (V_1, W_1) 点の値としては, $V_1 = 0.0001$, $W_1 = V_1 \times \tan \theta$, を採用した。

以下, V_1 の値に 0.0001 を加えて $V_2 = V_1 + 0.0001$, とし, 常微分方程式 (4) に Runge 法によって W_2 を計算し以下順次, 解曲線上の座標点を決定することができる。しかし, 図 2 を見れば了解されるように, この問題の解曲線をたどっていくと, W の値がゼロに近くなって (14) 式の右边が発散することが

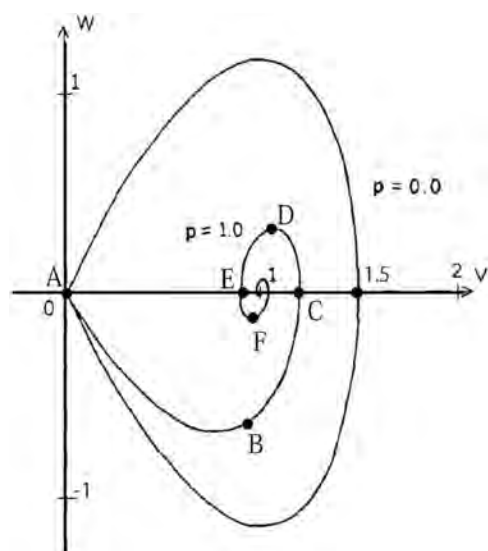


図 3 $p=0$ および, $p=1.0$ とした場合の式 (14) の解曲線

ある。このような時には (14) とは逆数の関係にある、次の (18) 式によって、 W の値を増加させて、 V の値を Runge 法によって、解曲線の前進方向への計算を継続する。

$$dV/dW = W/\{pW - 4V(V-1)\} \quad (18)$$

解曲線が相平面 (V, W) の上半面にある場合には、 V 値は減少させて Runge 法によって W の値を求める。

以上の計算アルゴリズムは FORTRAN のコードで、およそ 150 行前後のプログラムとして作成することができた。

注記：この解曲線を定める計算を進めるのに、4 次の Runge 法を用いて、Runge-Kutta 法は用いなかった。実際に計算を進行させると、Runge-Kutta 法だと (14) 式と (18) 式の採用境界点付近で、不安定を生ずることがしばしばあったからである。

2.7 計算精度の確認

この計算アルゴリズムによる結果は、その正確さが検証されるのが望ましい。このアルゴリズムは、ひとつ前の点の座標を算出決定した後に、その値を根拠として次の点の座標を算出決定する、という作業を行っている。このようなアルゴリズムの場合、誤差は逐次累積していく傾向があるはずである。このような誤差の累積は、全体としての結果の信頼性に悪影響をもたらすと推定される。このためにこのアルゴリズムの正確さを判定する、なんらかの手段があることが望ましい。

Johnson (1970) によると、 $p=0.0$ に対する解曲線は、理論的に相平面上で (1.5, 0.0) の点を通り (この点を P 点と呼ぶ)、原点 (0, 0) に戻ってくる (この点を Q 点とする) とされる。

いっぽう、今回作成したアルゴリズムの結果は、 $p=0.0$ とした場合、P 点は (1.4925, 0.0)、解曲線を一周した後、原点付近に戻ってきた結果は Q 点は (0.0005, 0.0) となった。

この結果を見ると、誤差は P 点の V 値で 0.5%、Q 点で 0.05% であるため、このアルゴリズムによる計算結果は十分に信頼のおけるものであると判断することができるであろう。

2.8 相平面 (V, W) の解曲線から、水位変化曲線 (V, T) を求める方法

前項では、川に侵入する津波段波を表す式 (14) の解曲線を相平面 (V, W) 上に求める手続きを述べたが、これだけでは、眼に見える形の段波波形を表す表示にはなっていない。正規化の変数変換は行ってはいても、空間座標 (T) の関数としての変数 V (水面を表す η を正規化したもの) を図化表示しないと、本稿の問題が解けたという実体は見えてこないであろう。

注記：(10) 式を見ればわかるように、変数 T は、水平座標 z を正規化したものであることに注意する。

相平面 (V, W) 上に解曲線 $W=G(V)$ が得られている場合に、 V (水面の高さ) を空間座標 T (水平座標 z と考えてよい) で表現するには、次の積分 T_1 の計算を行えばよい。

$$T_1 = \int \frac{dV}{G(V)} = \int \frac{dV}{W} \quad (19)$$

この積分の出発点は、相平面、すなわち、(V, W) 面の原点 (0, 0) である (図 3 の A 点)。この点は T 座標 (z 座標、あるいは、 x 座標) 上で、段波の「最前点」、つまり「段波が始まる点」に相当する。本稿で一番最初に掲げた図 1 の 2 つの段波の図で、上下各図の A 点が、この (V, W) 面の原点 (0, 0) に相当する点となる。

解曲線上の各点について、その点の T の値を (19) の積分を実行することによって計算を進めることになる。以下、図 3 の A ~ F の各点に注目して以下の文章を読み進めていただきたい。

図 3 の A 点から B 点を経て C 点に至るまでは、 V の値は正の方向に増加していき、この間は W の値は負 ((V, W) 面の下半分をたどる) である。したがって (19) の積分を計算すると T の値は、負の値として、絶対値が増加していくことになる。C 点を超えて D 点を超えて E 点に向かう解曲線上では、 W の値が正となるのに対して、今度は V の値が減少する。その結果、解曲線に沿って (19)

の積分を計算すると、ふたたび T の値は負の値としてその絶対値が増え続ける。

結局、図 3 の A 点を出発して、B, C, …E, F と進行するにつれて、 T 値はゼロから負の値に進んでその絶対値が増え続けることになる。この間 V の値は、ゼロから始まって増加し、途中で 1.0 を超えて、C 点で 1.2 ぐらいの値となり、ここから減少に転じて、E 点で 0.9 ぐらいの最小値となる。そうして、解曲線が螺旋を描いて、ついには、 $V=1.0$ の値に収束する。このとき、 T は $-\infty$ に近づいている。そこで、現実の座標上にこの様子を描いて見ると、波状段波となっていることが想定できるであろう。

図 2 に示されるように、 $T=0$ の点（つまり、 T 座標の原点）は、波状段波の最先端点であり、 $T=-\infty$ が、津波が浸入してくる河口点なのである。

次項では、渦粘性（エネルギー消散率）を表す p の値を 0.2~2.0 までの様々な値を与えることによって、各場合の相平面（ V, W ）図と、波状段波の形状を表す（ T, V ）の曲線を掲げることしよう。

なお、(19) 式で、分母がゼロ付近になるときは、 T の計算は、次の T_2 式によればよい。

$$T_2 = \int \frac{dW}{\{pW - 4V(V-1)\}} \quad (20)$$

3. p （エネルギー散逸率）ごとの河川遡上の津波波形

それではいよいよエネルギー散逸率 p ごとの、相平面（ V, W ）上の解曲線の図と、(13) 式の解（ T, V ）の図を見ていくことにしよう。ただし、(13) 式の解のままで、原点 $T=0$ が段波の先頭（図 2 の A 点）、 $T=-\infty$ が河口を表し、段波の形状は T の負の領域にのみ現れるので、 T 軸の値は正負逆にして図示する。したがって、以下の（ V, T ）の図では左端遠方に河口がある図になっていることに注意したい。

3.1 $p=0.2$ の場合

図 4 は、 $p=0.2$ とした場合の、相平面（ V, W ）上の (14) 式の解曲線を表している。解曲線は原点（0, 0）を出発して下半面（ $W < 0$ ）の領域に大きな弧を描いて（1.42, 0）の点を通り、上半面に入り、それ以後（1, 0）点の周りに幾重にも螺旋を描いて最終的にこの点に収束して行く。

河口から侵入した波状段波の形状を表す (14) 式の、 $p=0.2$ の場合の解析解を図 5 に示す。

波状段波を構成する多数の波の頂点と谷とが交互に現れている。山と谷の頂点付近には、おのおの 2 個の数字が記してあるが、上の数字が各頂点の T 座標、下の数字が V 座標の値を示している。最初の山の頂点の V の値は、1.42 となっているが、これは波状段波の先頭の波の高さが、河口での津波による水上昇量（ ξ_∞ ）の 1.42 倍の高さになることを表している。 $p=0.0$ の場合、この値は 1.5 となることが理論的に知られているので、波状段波が形成される場合には、津波の高さは、河口での津波の高さの 50% 増しの値になることは、知っておくべきである。

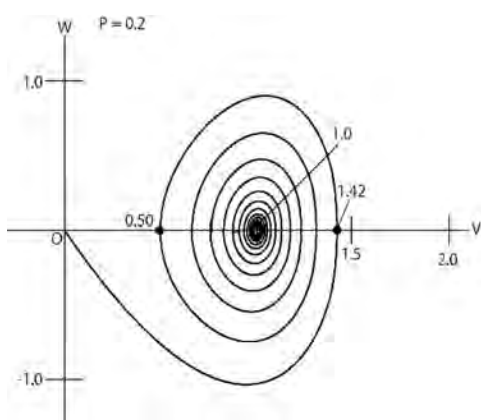
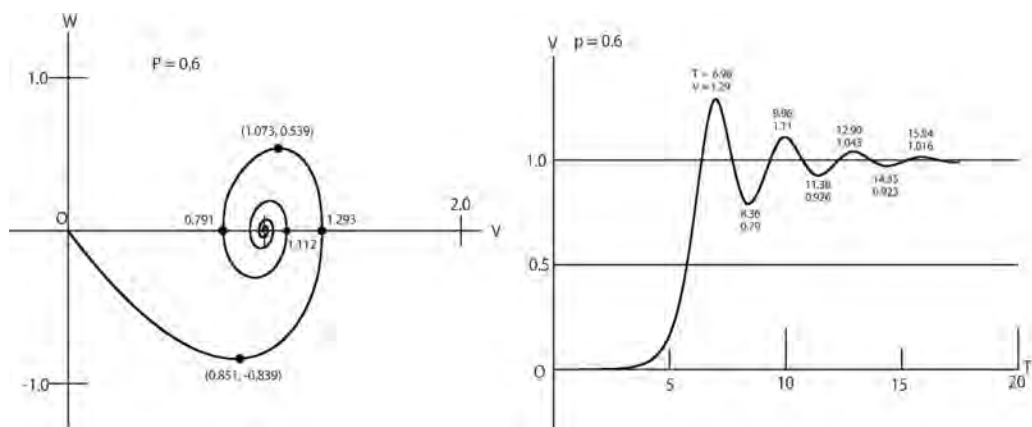
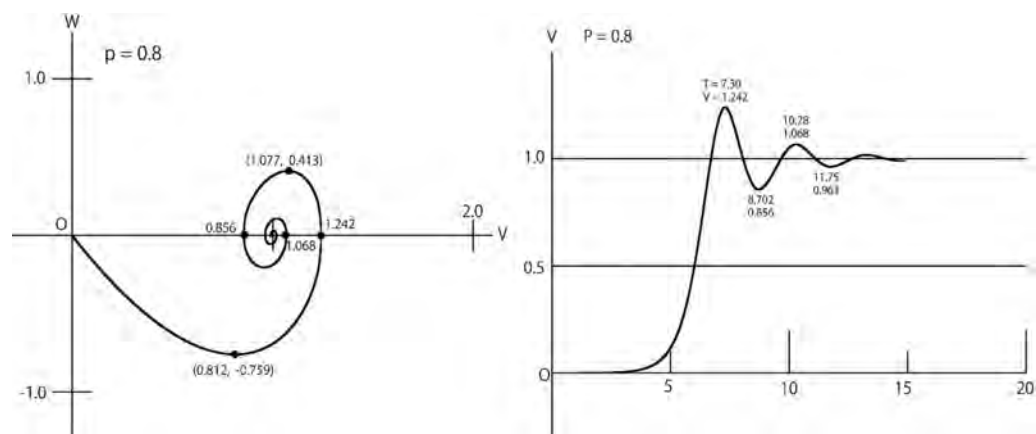
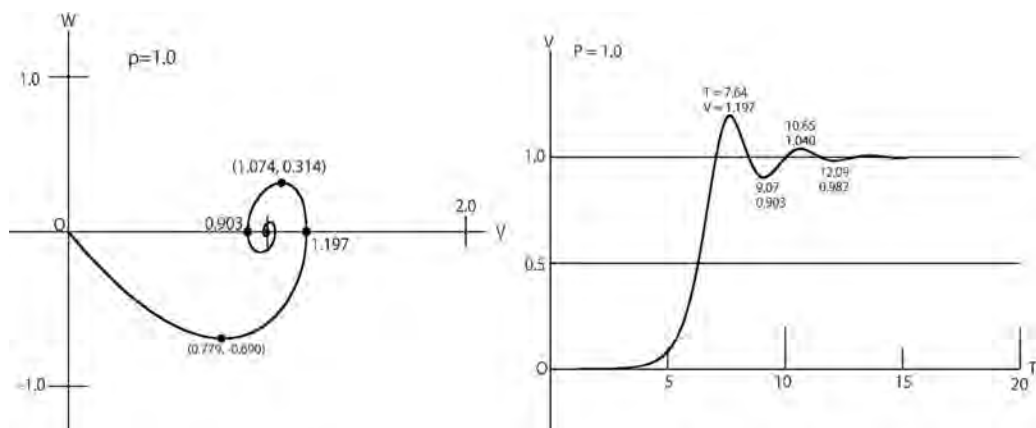


図 4 式 (14) の相平面（ V, W ）上の解曲線

図7 エネルギー消散率 $p=0.6$ の相平面 (V, W) 上の解曲線 (左) および理論波形 (右)図8 エネルギー消散率 $p=0.8$ の相平面 (V, W) 上の解曲線 (左) および理論波形 (右)図9 エネルギー消散率 $p=1.0$ の相平面 (V, W) 上の解曲線 (左) および理論波形 (右)

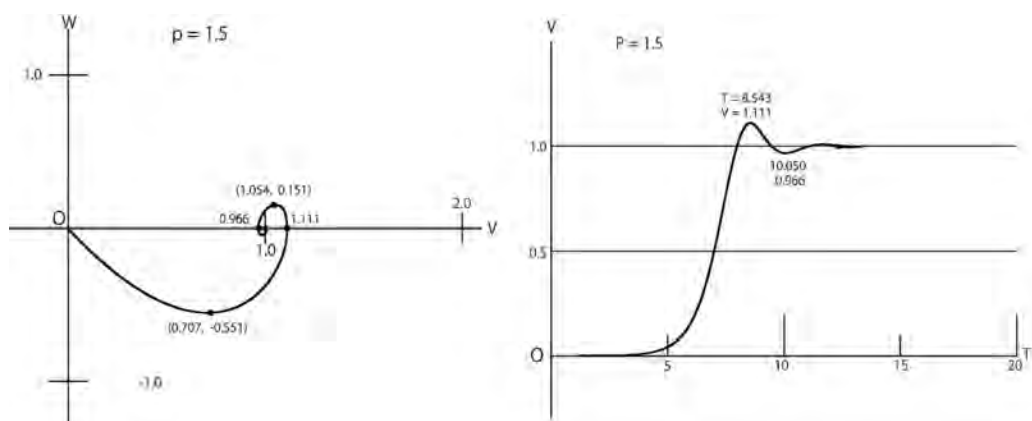


図 10 エネルギー消散率 $p=1.5$ の相平面 (V, W) 上の解曲線 (左) および理論波形 (右)

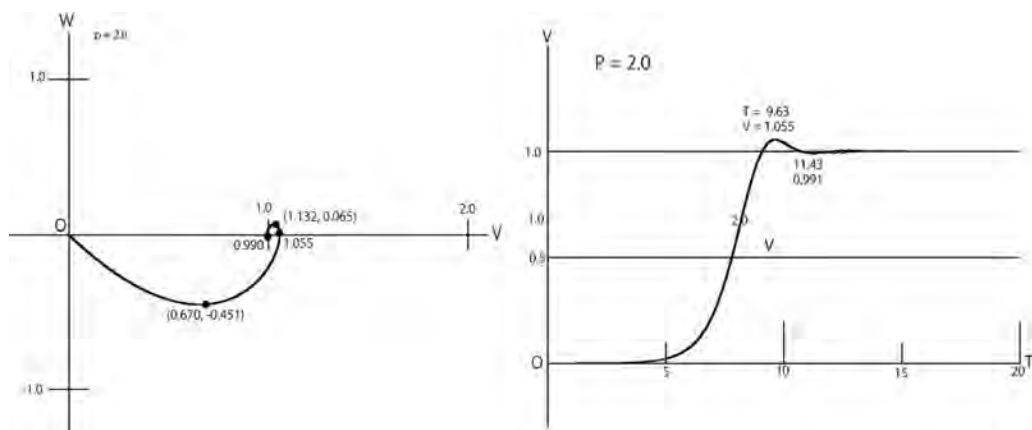


図 11 エネルギー消散率 $p=2.0$ の相平面 (V, W) 上の解曲線 (左) および理論波形 (右)

間尺度 τ で表記された「正規化された KdV-Burger の式」(9) を得た。さらに、この (9) 式に (10)～(12) 式で表される変数変換によって、空間座標はさらに変数 T で表記されることになり、その結果が図 5～図 11 のような、横軸が T で表記された波状段波の解を得た。

それでは、これらの図は、現実どういう水平尺度、鉛直尺度をもった図に戻ることができるのであろうか？本項ではこの問題を考えてみよう。

上述のように、現実の水平尺度 x と、(9) 式の水平尺度 z の間には次の関係があった。

$$z = \beta^{-1/2} x = \sqrt{\frac{6}{c_0 D^2}} x \quad (21)$$

さらに、 z と T の間には（自動車に乗って観察した効果を見れば）次の関係があった（(10) 式）。

$$\sqrt{\frac{8}{\xi_\infty}} T = z \quad (22)$$

さらに、河口での津波による水位上昇量 η_∞ とこの式 (22) の ξ_∞ の間には

$$\xi_\infty = \frac{3}{2} \frac{c_0}{D} \eta_\infty \quad (23)$$

結局、現実の水平尺度 x と T との間には、以上 3 式 (21)～(23) によって、次の関係があることになる、

$$x = \frac{2\sqrt{2}}{3} \sqrt{\frac{D^3}{\eta_{\infty}}} T \quad (24)$$

例えば、川の水深 D が 2m, 外洋から侵入して来た津波による水位上昇量 η_{∞} が 1m の場合には

$$x=2.67 T$$

となる。例えば、 $p=0.2$ の場合、図 5 から、第 1 波, 2 波, 3 波, 4 波の各波頭を, T ではかった位置 $T1, T2, T3, T4$ は、波の開始点から $T1 = 6.68, T2 = 9.64, T3 = 12.63, T4 = 15.56$ の位置にある。現実の x 座標で書いた波頭の位置は、これらの各数字に 2.67 をかけて

$$17.8\text{m}, 25.73\text{m}, 33.72\text{m}, 41.55\text{m}$$

の位置にあると算出される。

各波頭の高さは、 V の値に ξ_{∞} を乗ずることによって得ることができる。

図 5 から、第 1 波は $V=1.42$ となっているが、 $\xi_{\infty}=1.0\text{m}$ であれば、この第 1 波の波頭の高さは 1.42m となる。以上の変数変換の「戻し作業」によって、図 5～図 11 を現実の波状段波の実尺形状に読み返すことができるであろう。

5. 考察

以上の議論を現実の津波による河川浸入時に観察された波状段波と対比し、 p の値を現実に発生した津波について、どの程度の値とするのが合理的であるかを検証するのが次の課題であろう。

Appendix 有限振幅性、および分散性を考慮した長波の伝播方程式 (KdV 方程式) の導出

A 1. はじめに

海から河川や水路に侵入した津波のように、水深一定の 1 次元水路を進行する波に対して、有限振幅性と分散性を考慮した長波のふるまいを表す式として、KdV (Korteweg-de-Vries) 方程式が知られている。この理論についてはすでに 19 世紀末に完成している (Korteweg and De Vries, 1895)。その式は、土木工学や地球科学を学ぶ大学の後期課程の

学生諸子の学習教材として必須の知識であるが、その前提となる仮定や、導出方法を一步一步明示して書かれた文献は案外少ない。そこで、本稿では繁をいとわず、その前提となる仮定と、導出過程をここに一步一步、途中の式を省略せずに記しておくことにしたい。

A 2. KdV 方程式で扱う長波の仮定

津波のように、そのおよその水平尺度 (= 波長) L が、水深 D と比較して大きい波は長波と呼ばれる。この場合、この 2 つの尺度の比率、すなわち D/L は小さな値となり、この小ささを δ と表記することにしよう。

これに対して、海面の水位変動量 (= 振幅、あるいは波高) a は、水深 D に比較して小さな量とみなすことができるから、こちらの 2 つの尺度の比率、すなわち a/D もまた、小さな量であるので、この小ささを ε と表記することにしよう。

ここに、2 個の別個の「小ささ」のパラメータ、 δ と ε が出てきたが、ここで、 ε のほうが δ より「小ささの程度が強い」と仮定して、 δ^2 と ε が同じ程度の小ささであると仮定する。すなわち、 aL^2/D^3 が中庸な数 (1 とか 2 とかいう程度の数値) であると仮定していることになる。この仮定を Ursell (アーセル) の仮定という。

水深 D が一定とみなせる水域を進行する津波のような現象に対して、海面上昇量を η に対する運動方程式を、 $O(1)$ (0 次微小項 ε^0 まで採用し、それ以上の高次項を無視した解、 O はオーダーの意味)、および $O(\varepsilon^1)$ (ε^1 の項までを採用しそれより高次の項を無視した、の意) の項までを取り入れることにする。

A 3. 流体力学の基本式

ここで考える波は、1 次元的な河川 (水路) を進行する波であるから、波の進行方向に x 軸、鉛直上方を正とする y 軸をとる。ここで考える波は、この 2 次元座標内の現象である。平均水面上の 1 点として原点 O を取る。

波があることによって生ずる、水表面の形を、 t を時間として

$$y = \eta(x, t) \quad (\text{A1})$$

水深 D は一定と仮定する。水底は、 $y = -D$ (一定) である。

注：座標図は本文図 2 を参照のこと。

水は粘性や、底面での摩擦のない完全流体とすると、初期に「うずなし」であれば、その条件はそれ以後の時間にも保たれ続ける。この場合、速度ポテンシャル関数 φ を導入することができて、水粒子の流速の、 x 、および y 成分 (u, v) は、

$$u = -\frac{\partial \varphi}{\partial x}, \quad v = -\frac{\partial \varphi}{\partial y} \quad (\text{A2-a, b})$$

で、与えられる。

質量保存の式 (連続の方程式) は、 $\partial u / \partial x + \partial v / \partial y = 0$ であるが、この式は速度ポテンシャル関数を用いれば、

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = 0 \quad (\text{A3})$$

と、書ける。

水底では、流速の鉛直成分はゼロであるから。次の式が成り立つ、すなわち

$$v = 0 \text{ on } y = -D \quad \text{あるいは} \quad \left[\frac{\partial \varphi}{\partial y} \right]_{y=-D} = 0 \quad (\text{A4a, A4b})$$

が成り立つ。

A 4. 速度ポテンシャル関数 φ の Taylor 展開

以下の表記で、添え文字 x は、 k による偏微分を表す、と約束する。

ここで、速度ポテンシャル関数 φ の $y = -D$ の周りの Taylor 展開形として、次の形を仮定してみる、すなわち、 $\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2, \dots$ を、 x と t だけの関数として、

$$\varphi = \varphi_0 + (y+D)\varphi_1 + (y+D)^2\varphi_2 + (y+D)^3\varphi_3 + \dots \quad (\text{A5})$$

この (A5) 式を (A4b) 式に代入すると

$$\varphi_1 = 0 \quad (\text{A6})$$

が得られる。

(A5) を (A3) に代入すると、

$$\sum_{n=0}^{\infty} \{ \varphi_{n,xx} + (n+1)(n+2)\varphi_{n+2} \} (y+D)^n = 0 \quad (\text{A7})$$

この (A7) 式は、 (x, y) 平面全体で成り立っていないから、各係数のすべてがゼロ、すなわち、

$$\varphi_k = -\frac{1}{k(k-1)} \varphi_{k-2,xx}, \quad k = 2, 3, \dots (\text{A8})$$

(A8) で、 k が奇数 $2m+1$ の時には、

$$\begin{aligned} \varphi_{2m+1} &= -\frac{1}{(2m+1)(2m-1)} \varphi_{2m-1,xx} \\ &= \dots = (-1)^m \frac{1}{(2m+1)!} \left(\frac{\partial}{\partial x} \right)^{2m} \varphi_1 \end{aligned} \quad (\text{A9})$$

となるが、(A6) より、この値はゼロになる。

同様に、 φ の添え字が偶数の場合は

$$\varphi_{2m} = (-1)^m \frac{1}{(2m)!} \varphi_0 \quad (\text{A10})$$

となる。 φ を第 4 項まで書くと次のようになる。

$$\varphi = \varphi_0 - \frac{(y+D)^2}{2!} \varphi_{0,xx} + \frac{(y+D)^4}{4!} \varphi_{0,xxxx} - \dots \quad (\text{A11})$$

この展開式の第 1 項を大きさ 1、すなわち、 $O(1)$ とすると、第 2 項は $O(\delta^2) = O(\varepsilon^l)$ 、第 3 項は、 $O(\varepsilon^2)$ となっていて、後の項ほど順次微小になっていくことを注意しておく。

(注： x で 1 階微分するということは、オーダー的には、ほぼ水平スケール L で 1 回割り算するのに等しい)

A 5. 運動学的水表面条件 (kinematic surface boundary condition, KBC)

運動学的水表面条件とは、水表面のあった水粒子は、どれだけ時間が経過しても水表面から逃れないという条件である。今の問題の場合には、

$$v = \frac{\partial \eta}{\partial t} + u \frac{\partial \eta}{\partial x} \quad \text{on } y = \eta(x, t) \quad (\text{A12})$$

と、書くことができる。(A12) の左辺の鉛直方向の流速 v を速度ポテンシャル φ によって書けば、次のようになる。

$$[v]_{y=\eta} = \left[-\frac{\partial \varphi}{\partial y} \right]_{y=\eta} \quad (\text{A13})$$

この式 (A13) の右辺に, $y=0$ の周りの Taylor 展開, すなわち

$$f(\eta) = f(0) + \eta \left[\frac{\partial f}{\partial y} \right]_{y=0} + \dots$$

を適用すれば, 次のようになる, すなわち

$$\left[-\frac{\partial \varphi}{\partial y} \right]_{y=\eta} = \left[-\frac{\partial \varphi}{\partial y} \right]_{y=0} + \left[-\frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} \eta \right]_{y=0} + \dots \quad (\text{A14})$$

となる。ここで左辺の第 1 項は $O(1)$ の量, 第 2 項は $O(\varepsilon)$ の量であることに注意する。結局 (A12) 式は次のようになる。

$$\left[-\frac{\partial \varphi}{\partial y} \right]_{y=0} + \left[-\frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} \right]_{y=0} = \frac{\partial \eta}{\partial t} + \left[-\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right]_{y=0} \frac{\partial \eta}{\partial x} \quad (\text{A15})$$

この式 (A15) で, 左辺・右辺とも, 第 1 項は $O(1)$ の量であり, 第 2 項は $O(\varepsilon)$ の量であることを注意する。

A 6. 表面圧力条件 (dynamic surface boundary condition, DBC)

水面で満たすべき条件は, 運動学的条件 (KBC) のほかに, 表面圧力条件 (DBC) がある。その条件とは, 表面圧力条件であって, Bernoulli (ベルヌイ) の公式で与えられる次の条件である。表面張力の影響を無視すれば, 水側の表面直下での水圧は, どこでも大気圧 P_0 に等しいという式である。すなわち, 次の式 (A16) が成り立つ。

$$\left[-\frac{\partial \varphi}{\partial t} \right]_{y=\eta} + g\eta + \frac{1}{2}(u^2 + v^2) = P_0 \quad \text{on } y = \eta \quad (\text{A16})$$

ここで, g は重力の加速度である。津波のような基本的に長波の場合, 水平流速 u は鉛直流速 v より大きいから, $u^2 + v^2$ の部分は, 後半の部分は無視できて, u^2 のみに置き換えることができる。さらに, 左辺第 1 項に前述と同じ Taylor 展開を適用すれば, (A16) は最終的に次のようになる。

$$\left[-\frac{\partial \varphi}{\partial t} \right]_{y=0} + \left[-\frac{\partial^2 \varphi}{\partial y \partial t} \eta \right]_{y=0} + g\eta + \frac{1}{2}[u^2]_{y=0} = P_0 \quad (\text{A17})$$

この (A17) 式で, 第 1 項と第 3 項は $O(1)$ の大きさの項であり, 第 2 項と第 4 項は $O(\varepsilon)$ の大きさの項であることに注意したい。

A 7. $O(1)$ までの解

津波のような長波の, 最大項, すなわち $O(1)$ の項だけを採用した場合の, 海面波形 η の満たすべき式 (解) を求めよう。

KBC 条件の式 (A15) の $O(1)$ の項だけを採用すると, 次の式が得られる。

$$\left[-\frac{\partial \varphi}{\partial y} \right]_{y=0} = \frac{\partial \eta}{\partial t} \quad (\text{A15-1})$$

この式に (A11) の第 2 項までを採用して, 左辺に代入すると, 次の式が得られる。

$$-D\varphi_{0,xx} + \frac{\partial \eta}{\partial t} = 0 \quad (\text{A18})$$

DBC 条件の式 (A17) の $O(1)$ の項だけを採用し, (A11) の第 1 項を採用すると, 次の式が得られる。

$$-\frac{\partial \varphi_0}{\partial t} + g\eta = P_0 \quad (\text{A19})$$

(A18) を t で微分し, (A19) を x で 2 度微分して, φ_0 を消去し, $gD=c_0^2$ と置くと, 次の式が得られる。

$$\frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} = c_0^2 \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} \quad (\text{A20})$$

この式は 1 次元の波動方程式であって, その解は速度 c_0 で, 左方, および右方におのの伝わる波の 2 成分を表す。すなわち,

$$\eta = f_+(x - c_0 t) + f_-(x + c_0 t) \quad (\text{A21})$$

ここで, f_+ , f_- はおのの正方向, および負方向に伝わる波の成分を表す。以下の議論では, 特に正方向に伝わる波, $\eta = f_+(x - c_0 t)$ のみを扱うことにする。この場合には,

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} = -c_0 \frac{\partial \eta}{\partial x} \quad (\text{A22})$$

が, 成り立つ。この式を (A18) に代入すると,

$$D\varphi_{0,xx} + c_0 \frac{\partial \eta}{\partial x} = 0 \quad (\text{A23})$$

が得られるが、この式を x で積分し、 $-\varphi_{0,x} = u_0$ であることに留意すれば、次の式が得られる。ここで、添え字「0」は、 $O(1) = O(\varepsilon^0)$ の近似の解であることを表している。

$$u_0 = \frac{c_0}{D} \eta \quad (\text{A-24})$$

この式で、水平流速 u に添え文字「0」をつけたのは、 $O(1)$ までの制度の解であることを表したものである。

A 8. $O(\varepsilon^1)$ までを採用した解

前項では $O(1) = O(\varepsilon^0)$ の項までしか採用しなかった。その解は長波の伝播を表す波動方程式 (A20) であった。本項では、さらに 1 段高次の項、すなわち $O(\varepsilon^1)$ の微小項までを採用した場合の解を求めることにしよう。

表面圧力境界条件 (DBC) の式 (A17) は全四項を採用する。この式の左辺第 1 項の φ に対しては (A11) の第 2 項までを採用する。第 2 項、および第 4 項はすでにこれらの項自身が高次の微小項であるから、前項の $O(1)$ 次近似解として得られた、(A23)、および (A24) によって、 u と φ をすべて η に書き換えても差支えがない。結局、この精度まで正しい DBC 境界条件の式は次のようになる。

$$g\eta - \frac{\partial \varphi_0}{\partial t} + \frac{c_0^2}{2} \left(D\eta_{xx} + \frac{1}{D^2} \eta^2 \right) = 0 \quad (\text{A25})$$

今度は、運動学的表面条件式 (KBC) の (A15) を考える。この式も全 4 項のすべてを採用し、左辺の第 1 項の φ としては、(A11) の第 3 項までを採用する。左辺、および右辺の各第 2 項に対しては、前項で導いた (A23) 式、および (A24) 式などを用いて、なるべく η を用いて書き換えると、最終的に次の $O(\varepsilon^1)$ まで正しい高精度の KBC 式が得られる。(添え文字は偏微分を表す)

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} - D\varphi_{0,xx} + c_0 \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{D} \eta^2 - \frac{D^2}{6} \eta_{xx} \right) = 0 \quad (\text{A26})$$

(A25) 式、および (A26) 式から φ_0 を消去することによって、次の式に到達する。

$$\eta_{tt} = c_0^2 \eta_{xx} + c_0^2 D \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(\frac{3}{2} \frac{1}{D^2} \eta^2 + \frac{1}{3} D \eta_{xx} \right) \quad (\text{A27})$$

この式と $O(1)$ 近似までで得られた (A20) 式と比較すると、高精度の項まで採用したために、右辺第 2 項以下の微小項が付け加わっていることに注意したい。

(A20) 式が、右行きの波と左行きの波の両方を含んだ解であったように、(A27) も右行の波の解と、左行きの波の解を含んでいる。われわれは、(A27) の解のうち、右行きの波だけを表す式を次の目標とする。

A 9. (A27) 式から、右行き波が満たすべき方程式を分離する

いま、(A27) の右辺の高次項の次の部分を P と置く。

$$P(\eta) \equiv D \left(\frac{3}{2} \frac{1}{D^2} \eta^2 + \frac{1}{3} \eta_{xx} \right) \quad (\text{A28})$$

すると (A27) 式は

$$\frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} = c_0^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} (\eta + P) \quad (\text{A29})$$

と書ける。

この P は従属変数は $\eta (= \eta(x-ct))$ のみであるから、 P もまた、

$$\frac{\partial P}{\partial t} = -c_0 \frac{\partial P}{\partial x} \quad (\text{A30})$$

と書けるはずである。

いま、 F が次の式を満たす未知関数であるとする。

$$\eta_t = -c_0 \frac{\partial}{\partial x} \{ \eta + F(\eta) \} \quad (\text{A31})$$

この式を (A29) に代入すると、

$$-c_0 \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial}{\partial t} (\eta + F) = c_0^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} (\eta + P)$$

この式の両辺を c_0 で割り、 x で積分すると、

$$-\frac{\partial}{\partial t} (\eta + F) = c_0 \frac{\partial}{\partial x} (\eta + P)$$

この式の左辺第 1 項を (A31) によって置き換えると、次のようになる。

$$c_0 \frac{\partial}{\partial x} (\eta + F) - \frac{\partial F}{\partial t} = c_0 \frac{\partial \eta}{\partial x} + c_0 \frac{\partial P}{\partial x}$$

この式の左右両辺の共通要素を脱落させると、

$$c_0 \frac{\partial F}{\partial x} - \frac{\partial F}{\partial t} = c_0 \frac{\partial P}{\partial x} \quad (\text{A32})$$

ところで、この式の右辺は次のように変形できる、すなわち

$$c_0 \frac{\partial P}{\partial x} = \frac{1}{2} c_0 \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{1}{2} c_0 \frac{\partial P}{\partial x} = \frac{1}{2} c_0 \frac{\partial P}{\partial x} - \frac{1}{2} c_0 \frac{\partial P}{\partial t} \quad (\text{A33})$$

となつて、結局、(A32) の左辺と (A33) の右辺が等しいことになる。こうして未知関数 $F(\eta)$ は

$$F(\eta) = P(\eta)/2 \quad (\text{A34})$$

この $F(\eta)$ を (A31) に代入して、われわれは次の式に到達する。

$$\eta_t + c_0 \eta_x + c_0 D \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{3}{4} \frac{1}{D^2} \eta^2 + \frac{1}{6} D \eta_{xx} \right) = 0 \quad (\text{A35})$$

この式はまた、

$$\eta_t + c_0 \eta_x + \frac{3}{2} \frac{c_0}{D} \eta \eta_x + \frac{c_0}{6} D^2 \eta_{xxx} = 0 \quad (\text{A36})$$

となる。この第 3 項が非線形性を表す項で、第 4 項が分散性を表す項である。

この式 (A36) が、1 次元的に進行する津波に対する KdV 方程式である。

A 10. 津波に対する KdV 方程式の孤立波 (ソリトン) 解

本節では、KdV 方程式 (A36) を満足する波の解を求めることにする。独立変数 (x, t) を、次の (X, T) に変換する。これは現象を

速度 c_0 で右に移動する自動車に乗った人の眼で観察することに相当する。

$$X = x - c_0 t, \quad T = t \quad (\text{A37})$$

さらに、(A36) 式の係数を簡略化するために、従属変数 η と第 4 項の係数を次のように変換する。

$$\xi = \frac{3}{2} \frac{c_0}{D} \eta, \quad \frac{c_0}{6} D^2 \equiv \beta \quad (\text{A38})$$

以上の変換の結果、(A36) 式は次のような KdV 方程式の正規形になる。

$$\xi_T + \xi \xi_X + \beta \xi_{XXX} = 0 \quad (\text{A39})$$

いま (A39) の解のうち、時間が経過しても、元の波形が不変である (permanent) 解を求めることにしよう。この場合、 (X, T) 座標上で γ の速度で右に移動しているときには、 $\xi = \xi(X - \gamma T)$ と書くことができ、次の関係があることになる、すなわち

$$\frac{\partial \xi}{\partial T} = -\gamma \frac{\partial \xi}{\partial X}$$

と置き換えることができる。すると、(A39) 式は

$$-\gamma \xi_X + \xi \xi_X + \beta \xi_{XXX} = 0 \quad (\text{A40})$$

となつて、この式は X で積分することができる。 $X \rightarrow \pm \infty$ で $\xi \rightarrow 0$ である場合には、積分定数はゼロと置くことができ、(A40) 式は次の形となる。

$$-\gamma \xi + \frac{1}{2} \xi^2 + \beta \xi_{XX} = 0 \quad (\text{A41})$$

この式に $2\xi_X$ を掛けると、ふたたび X で積分することができて、

$$-\gamma \xi^2 + \frac{1}{3} \xi^3 + \beta \xi_X^2 = 0 \quad (\text{A42})$$

となる。この式を ξ_X について解くと、

$$\xi_X = \xi \sqrt{\frac{\gamma}{\beta} - \frac{1}{3\beta} \xi} \quad (\text{A43})$$

となるが、ここで、

$$-\frac{1}{3\beta} \equiv a, \quad \frac{\gamma}{\beta} \equiv b \quad (\text{A44})$$

と置くと, (A43) は

$$X = \int \frac{d\xi}{\xi \sqrt{a\xi + b}} \quad (\text{A45})$$

となる。この積分は計算できる (たとえば, 岩波, 「数学公式 I」, p95 参照)。積分定数は, X は $X - \gamma T$ の形で現れることに注意すれば, X は最終的に次の形となる。

$$X = \frac{1}{b} \log \left| \frac{\sqrt{a\xi + b} - \sqrt{b}}{\sqrt{a\xi + b} + \sqrt{b}} \right| + \gamma T \quad (\text{A46})$$

この式で, ξ について解けば, 次の式が得られる。

$$\xi = -\frac{b}{a} \operatorname{sech}^2 \left(\frac{1}{2} \sqrt{b} (X - \gamma T) \right) \quad (\text{A47})$$

(A44) の変換をもとの変数に置き戻せば,

$$\xi = 3\gamma \operatorname{sech}^2 \left\{ \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\gamma}{\beta}} (X - \gamma T) \right\} \quad (\text{A48})$$

となる。ここで, $3\gamma \equiv A$ と置き, (A38) によって, 有次元の値 η で表記すれば

$$\eta = \frac{2AD}{3c_0} \operatorname{sech}^2 \left\{ \frac{1}{2} \sqrt{\frac{A}{3\beta}} (x - ct) \right\} \quad (\text{A49})$$

ここで, $c = c_0 + \frac{A}{3}$ である。

(A29) の右辺の係数を, 孤立波の高さ H と, 置く。すなわち,

$$H = \frac{2AD}{3c_0}$$

と置くと, KdV 方程式 (A36) を満たす解は, 最終的に次の式で表わされる。

$$\eta = H \operatorname{sech}^2 \left\{ \frac{1}{2} \sqrt{\frac{3H}{b^3}} (x - ct) \right\} \quad (\text{A50})$$

ここで, $\operatorname{sech}(x)$ は双曲線関数の一種で, e を自然対数の底として

$$\operatorname{sech}(x) = \frac{1}{e^x + e^{-x}}$$

で定義される。

(A50) で表わされる孤立波の伝播速度 c は

$$c = \sqrt{g(D+H)}$$

となる。水深 $D=2\text{m}$, 波高 $H=1\text{m}$ の場合の孤立波 (Soliton) の波形を図 A2 に示した。

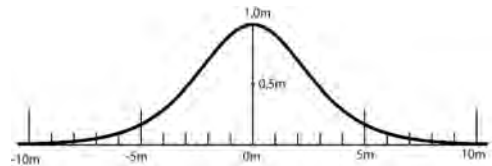


図 A1 水深 $D=2.0\text{m}$, 波高 $H=1.0\text{m}$ の孤立波の波形

参考文献

- 阿部邦明, 1986, 日本海中部地震津波の河川遡上調査, 津波工学研究, 3, 89-101
- 阿部邦明, 2015, 2011 年東北津波での岩手, 宮城県北部河川における最大水位の河口距離による推移, 津波工学研究報告, 32, 71-76
- Benjamin, T.B., M. J. Lighthill, 1954, On cnoidal waves and bores, Proc. Roy. Soc., 24, 448-460.
- Chester, W., 1966, A model of the undular bore on a viscous fluid, J. Fluid Mech., 42, 401-409
- Johnson, R. S., 1970, A nonlinear equation incorporating damping and dispersion, J. Fluid Mech. 42,49-60
- Korteweg D. J., and De Vries, 1895, Phil. Mag., 24, 367
- Perinovsky, Ye. N., 1982, Non-linear Dynamics of Tsunami Waves, Institute of Applied Physics, Gor'kii, Academia, Nauk, USSR, (in Russian).
- 千田健一, 2018, 日本海中部地震津波において, 能代港の (旧) 中島水面貯木場に来襲した津波クノイダル波の現地再調査および碎波シミュレーション, 津波工学研究報告, 35, 35-40
- 千田健一, 2019, 2016 年 11 月 22 日 福島県沖地震にて, 宮城県砂押川で発生した津波

- ソリトン波列の現地再現調査及び CIP 法による再現シミュレーション, 津波工学研究, 36, 127-135
- 千田健一, 岩間俊二, 三上 勉, 舘澤 寛, 鈴木 介, 2013, 非線形分散長波理論を用いた津波ソリトン分裂・河川遡上・マッハ反射シミュレーション, 津波工学研究報告, 30, 105-110
- 千田健一, 岩間俊二, 三上 勉, 舘澤 寛, 菊池 茂, 鈴木 介, 石川勝章, 2014, 日本海中部地震において能代港湾奥水面貯木場に来襲した津波ソリトン波列の再調査およびソリトン分裂シミュレーション, 津波工学研究報告, 31, 67-73
- 富沢 大, 今村文彦, 首藤伸夫, 1990, 非線形分散波計算と大型水槽実験の比較検討, 津波工学研究, 7, 67-104
- Tsuji, Y., T.Yanuma, I.Murata, and C. Fujiwara, 1991, Tsunami ascending in rivers as an undular bore, Natural Hazards, 4, 257-266
- 安田浩保, 渡辺康玄, 藤間功司, 2004, 2003 年 9 月の十勝沖地震に伴い発生した津波の河川遡上, 津波工学研究報告, 21, 99-110
- 安田浩保, 2006, 1 次元解析法に基づく 2003 年十勝沖津波の河川遡上の再現計算, 津波工学研究報告, 23, 87-95
- 安田浩保, 2007, 不等流を遡上する波状性を有する長波に関する推理実験とその数値計算, 津波工学研究報告, 24, 101-107