

浅水理論を用いた格子ボルツマン法の実地形適用に関する研究

東北大学 学生会員 ○村上 和幸

東北大学大学院 正会員 越村 俊一

1. はじめに

近年、格子ボルツマン法を津波などの災害シミュレーションに応用しようとする研究が進められている。たとえばZhouら(2003)は格子ボルツマン法を浅水理論に拡張し、理想的な地形条件での平面2次元計算の手法を確立した。また、石川ら(2006)はZhouらのモデルに基づき、東京湾の潮流解析や津波段波の再現計算についても成功例を報告している。さらに、大家(2008)は格子ボルツマン法の空間分解能の関連で詳細な精度評価を行い、その際に一様斜面への遡上計算も行っている。

本研究では、格子ボルツマン法による実地形での津波解析の実施を目標とし、汎用的な遡上計算、多領域の接続計算、無反射透過境界条件などの検討を行い、実際の津波解析への適用性を検討する。

2. 格子ボルツマン法

(1) 格子形状

本研究ではZhouらが確立した2次元9速度モデルを用いる。時間格子間隔 Δt ごとに流体中の仮想粒子は各方向の隣接した格子点へ移動すると仮定し、粒子の単位速度ベクトル $\mathbf{e}_\alpha = (e_{\alpha i}, e_{\alpha j}) (\alpha = 0, 1, \dots, 8)$ は、格子間隔 Δx としたときの、単位速度成分 $e = \frac{\Delta x}{\Delta t}$ を用いて

$$\mathbf{e}_\alpha = \begin{cases} (0, 0) & \alpha = 0 \\ e \times \left[\cos\left(\frac{\alpha-1}{4}\pi\right), \sin\left(\frac{\alpha-1}{4}\pi\right) \right] & \alpha = 1, 3, 5, 7 \\ \sqrt{2}e \times \left[\cos\left(\frac{\alpha-1}{4}\pi\right), \sin\left(\frac{\alpha-1}{4}\pi\right) \right] & \alpha = 2, 4, 6, 8 \end{cases} \quad (1)$$

と表す。

(2) 局所平衡分布関数

局所平衡分布とは有限の空間において平衡状態に達した粒子分布である。重力加速度 g 、水深 h 、速度 $\mathbf{u} = (u_i, u_j)$ であるとき、浅水理論から導かれる α 方向の局所平衡分布関数 f_α^{eq} は、上から $\alpha = \{0\}, \alpha = \{1, 3, 5, 7\}, \alpha = \{2, 4, 6, 8\}$ の場合として、次のようになる。

$$f_\alpha^{eq} = \begin{cases} h - \frac{5gh^2}{6e^2} - \frac{2h}{3e^2} u_i u_j & \\ \frac{gh^2}{6e^2} + \frac{h}{3e^2} e_{\alpha i} u_i + \frac{h}{2e^4} e_{\alpha i} e_{\alpha j} u_i u_j - \frac{h}{6e^2} u_i u_j & \\ \frac{gh^2}{24e^2} + \frac{h}{12e^2} e_{\alpha i} u_i + \frac{h}{8e^4} e_{\alpha i} e_{\alpha j} u_i u_j - \frac{h}{24e^2} u_i u_j & \end{cases} \quad (2)$$

(3) 格子ボルツマン方程式

格子ボルツマン法は、仮想粒子の移動である並進過程と、衝突により局所平衡分布に近づく衝突過程の2段階により計算を進める。

ここで、すべての粒子が同じ割合 τ で局所平衡状態に近づくと仮定したBGKモデルにしたがって格子ボルツマン方程式を表すと、

$$f_\alpha(\mathbf{x} + \mathbf{e}_\alpha \Delta t, t + \Delta t) = \left(1 - \frac{1}{\tau}\right) f_\alpha(\mathbf{x}, t) + \frac{1}{\tau} f_\alpha^{eq} + \frac{\Delta t}{6e^2} e_{\alpha i} F_i \quad (3)$$

右辺の第1項が並進過程、第2項が衝突過程、第3項が外力項を示す。

(4) 外力項

本研究の外力項では、地形の凹凸及び底面摩擦による影響を考慮している。地形の凹凸の影響を表すために、いくつかのSchemeが提案されているが、今回は高低差の激しい地形でも静水面を保つという条件から導いた次のSchemeを用いることにする。

$$F_z = \begin{cases} -g[h(\mathbf{x}, t) + h(\mathbf{x} + \Delta \mathbf{x}_i, t)] \frac{[z_b(\mathbf{x}) - z_b(\mathbf{x} + \Delta \mathbf{x}_i)]}{\Delta x} & \alpha = 1, 3, 5, 7 \\ -\frac{g}{4}[h(\mathbf{x}, t) + h(\mathbf{x} + \Delta \mathbf{x}_i, t)] \frac{[z_b(\mathbf{x}) - z_b(\mathbf{x} + \Delta \mathbf{x}_i)]}{\Delta x} & \alpha = 2, 4, 6, 8 \end{cases} \quad (4)$$

$z_b(\mathbf{x})$ は位置 \mathbf{x} における底面の高さである。

(5) 境界条件

障害物に対してはBounce-back条件を課す。位置 $\mathbf{x} + \mathbf{e}_\alpha$ に障害物があるとき、位置 \mathbf{x} における並進過程後の α' 方向の粒子分布関数 $f_{\alpha'}(\mathbf{x}, t + \Delta t)$ は次のように与える。 α' 方向は α 方向を 180° 回転した方向である。

$$f_{\alpha'}(\mathbf{x}, t + \Delta t) = f_\alpha(\mathbf{x}, t) \quad (5)$$

また、外側の境界には無反射透過条件を課す。右端で領域外への流出があるとする、そのときの境界条件は

$$\begin{cases} f_4(\mathbf{x}, t + \Delta t) = f_4^{eq}(h(\mathbf{x}, t), \mathbf{u}_{\text{right}}) \\ f_5(\mathbf{x}, t + \Delta t) = f_5^{eq}(h(\mathbf{x}, t), \mathbf{u}_{\text{right}}) \\ f_6(\mathbf{x}, t + \Delta t) = f_6^{eq}(h(\mathbf{x}, t), \mathbf{u}_{\text{right}}) \end{cases} \quad (6)$$

$f_{\alpha}^{eq}(h(\mathbf{x}, t), \mathbf{u})$ は同格子点において、水深 $h(\mathbf{x}, t)$ 、速度 \mathbf{u} としたときの局所平衡分布関数である。ここで \mathbf{u}_{rout} は、 \mathbf{x} における静水深を $h_0(\mathbf{x})$ とおいたときに、次の式から求める。

$$\mathbf{u}_{\text{rout}} = \left[(h(\mathbf{x}, t) - h_0(\mathbf{x})) \sqrt{\frac{g}{h_0(\mathbf{x})}}, u_j \right] \quad (7)$$

(6) 接続計算

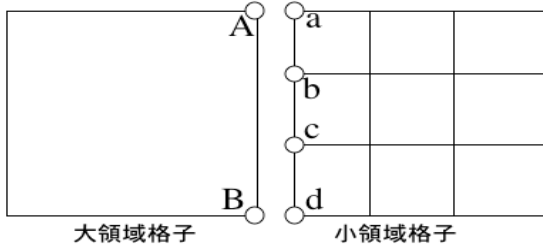


図-1 接続時の格子点関係

接続計算により、小領域は境界条件として大領域から水深や流速等の変数を受け取る。図-1のような接続により格子間隔が1/3になる例を考える。パラメータにはそれぞれ大文字及び小文字アルファベットの下付き文字を付け区別する。速度 \mathbf{u} は単純に線形内挿により大領域から小領域へ値を与えることとする。

$$\begin{cases} \mathbf{u}_a = \mathbf{u}_A \\ \mathbf{u}_b = \frac{2}{3}\mathbf{u}_A + \frac{1}{3}\mathbf{u}_B \\ \mathbf{u}_c = \frac{1}{3}\mathbf{u}_A + \frac{2}{3}\mathbf{u}_B \\ \mathbf{u}_d = \mathbf{u}_B \end{cases} \quad (8)$$

水深 h の接続は、静水深 h_0 からの変位 $h - h_0$ を線形内挿により領域1から領域2へ与え、そこで領域2の各格子点における静水深を加えることで接続を行う。

$$\begin{cases} h_a = h_A - h_{0A} + h_{0a} \\ h_b = \frac{2}{3}(h_A - h_{0A}) + \frac{1}{3}(h_B - h_{0B}) + h_{0b} \\ h_c = \frac{1}{3}(h_A - h_{0A}) + \frac{2}{3}(h_B - h_{0B}) + h_{0c} \\ h_d = h_B - h_{0B} + h_{0d} \end{cases} \quad (9)$$

最後に、この巨視的変数を用いて局所平衡分布関数から各格子点の粒子分布関数を与える。

(7) 遡上波と流下波の先端条件計算法

斜面を遡上する場合は次の格子点の水深 h' を現格子点との高低差から $h' = h(\mathbf{x}, t) + z(\mathbf{x}) - z(\mathbf{x} + \mathbf{e}_\alpha)$ として求めた後、連続式を用いて次の格子点の単位幅流量を決定する。その後、連続式の関係から流速 \mathbf{u} を求める。

$$h(\mathbf{x} + \mathbf{e}_\alpha, t) = \begin{cases} h' & , h' > 0 \\ 0 & , h' \leq 0 \end{cases} \quad (10)$$

$$\mathbf{u}(\mathbf{x} + \mathbf{e}_\alpha, t) = \begin{cases} \frac{h(\mathbf{x}, t)\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)}{h(\mathbf{x} + \mathbf{e}_\alpha, t)} & , h(\mathbf{x} + \mathbf{e}_\alpha, t) > 0 \\ 0 & , h(\mathbf{x} + \mathbf{e}_\alpha, t) \leq 0 \end{cases} \quad (11)$$

下り斜面の戻り流れおよび完全水平面での流れは、本間の越流公式に従い次の格子点の単位幅流量 $q(\mathbf{x} + \mathbf{e}_\alpha, t)$ を決定する。 $h(\mathbf{x}, t), h(\mathbf{x} + \mathbf{e}_\alpha, t)$ のうち、大きい方を h_1 、小さい方を h_2 とすると、

$$q(\mathbf{x} + \mathbf{e}_\alpha, t) = \begin{cases} 0.35h_1 \sqrt{2gh_1} & , \frac{h_2}{h_1} < \frac{2}{3} \\ 0.91h_2 \sqrt{2g(h_2 - h_1)} & , \frac{h_2}{h_1} \geq \frac{2}{3} \end{cases} \quad (12)$$

3. 東南海・南海地震を想定した計算例

4つの領域を上記の接続計算により接続し、東南海・南海地震が起きたときの、尾鷲付近の津波状況をシミュレートした。比較のためにFDMでも同様の条件で計算した結果、尾鷲付近のある点での時系列水位変化は図-2のようになった。津波発生後40分後まではほぼFDMの計算結果と一致し、それ以降、多少水位にずれがあるが結果は良好と言える。

以上の結果から、格子ボルツマン法により、津波の再現計算が可能であることがわかった。格子ボルツマン法は並列化により大幅な高速化が可能であるため、リアルタイム津波シミュレーションなどへの応用も期待される。

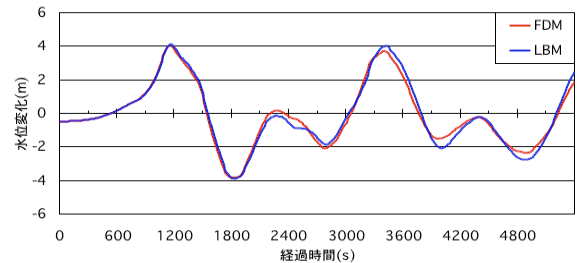


図-2 尾鷲付近での時系列水位変化

参考文献

- Jian Gul Zhou: Lattice Boltzmann Method for Shallow Water Flows, Springer, 2003
- 石川裕士・立石絢也・榎山和男: 非構造格子に基づくCIVA-格子ボルツマン法による浅水長波流れ解析, 応用力学論文集, 第9巻, 2006.
- 大家 隆行, 格子ボルツマン法による浅水長波の数値計算に関する基礎的研究, 東北大学修士論文, 2008