

# 格子ボルツマン法による自由表面流の解析

東北大学大学院 学生会員 ○荒木 健  
東北大学大学院 正会員 越村 俊一

## 1. はじめに

格子ボルツマン法(Lattice Boltzmann Method, 以下LBM)は、有限差分法などの連続体としての流体の方程式を解く従来の手法(例えば後藤・小川(1982))とは異なる新しい津波計算手法として注目されている。例えば、大家ら(2008)やFrandsen(2008)は、浅水理論に基づいたLBMを津波陸上溯上計算へ適用し、従来手法等との比較を通してLBMの精度や安定性を検討した。しかし、浅水理論に基づいている以上、長波近似の成立しない流れ場においてはその精度は著しく低下する。

そこで上記問題に対応するため、特に自由表面流れを高精度で追跡できる格子ボルツマン法の検討を行う。本稿では、Thürey(2007)に倣い、ナビエ・ストークス式に基づくLBMを自由表面流に適用する。そして、津波などの水災害シミュレーションへ応用する新たな数値計算手法としてのLBMの可能性を検討する。

## 2. 格子ボルツマン法

### (1) 格子ボルツマン法の概要

LBMは、流体を格子(Lattice)上を並進・衝突する仮想的な粒子の集合体ととらえ、格子上の粒子分布関数を用いて、質量・運動量保存則を満たすように流体の巨視的変数を求める手法である。微視的仮想粒子の運動により流体の動きを求めるという点が従来手法と大きく異なる点であり、これにより多くの利点が生まれる。特に、複雑な地形の流れ場や混相流などへ適用した際に威力を発揮する手法であるとされている。

以下ではThürey(2007)に倣い、手法の要点のみを述べるが、詳細は参考文献等を参照していただきたい。

### (2) 格子形状

本研究では格子形状に図-1の2次元9速度モデルを用いる。仮想粒子の運動はこの格子によって有限な方向に制限され、粒子の速度 $\mathbf{e}_i$ ( $i = 1, 2, \dots, 9$ )は、それぞれ $0$ ( $i = 1$ )、 $e$ ( $i = 2, 3, 4, 5$ )、 $\sqrt{2}e$ ( $i = 6, 7, 8, 9$ )となる。ここで、 $e = \Delta x / \Delta t$ (格子間隔 $\Delta x$ 及び時間刻み幅 $\Delta t$ )である。

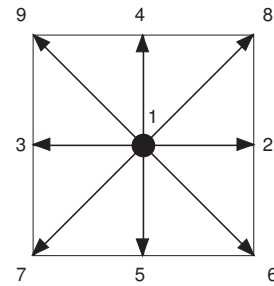


図-1 2次元9速度格子

### (3) 格子ボルツマン方程式

時刻 $t$ 、位置 $\mathbf{x}$ で $i$ 方向の速度を持つ粒子の分布関数 $f_i(\mathbf{x}, t)$ の時間発展を格子ボルツマン方程式により解く。格子ボルツマン方程式は仮想粒子の並進と衝突の二つの過程を表しており、並進過程において、粒子は速度に応じた方向の隣接する格子点へと移動し、衝突過程において、粒子分布が単一割合で局所平衡状態へ再配分される(BGKモデル)。

$$f_i(\mathbf{x}, t + \Delta t) = \left(1 - \frac{1}{\tau}\right) f_i(\mathbf{x} + \Delta t \mathbf{e}_i, t) + \frac{1}{\tau} f_i^{eq} \quad (1)$$

ここで、 $\tau$ は単一時間緩和係数であり、 $\tau$ により流体の平衡状態へ達する速さ(粘性)が決まる。また $f_i^{eq}$ は局所平衡状態における粒子分布関数であり、各セルの密度 $\rho = \sum_i f_i$ および流速 $\mathbf{u} = \sum_i \mathbf{e}_i f_i / \rho$ から求められる。

$$f_i^{eq}(\mathbf{x}, t) = w_i \rho \left[ 1 - \frac{3}{2}(\mathbf{u})^2 + 3(\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{u}) + \frac{9}{2}(\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{u})^2 \right] \quad (2)$$

ここで、 $w_i = \begin{cases} 4/9 & (i = 1) \\ 1/9 & (i = 2 \sim 5) \\ 1/36 & (i = 6 \sim 9) \end{cases}$

### (4) 自由表面の表現方法

#### a) 三種類のセル

自由表面の表現のために、流体の充填率によって、3種類のセルを用意する(図-2)。まず、全て流体で満たされているセルは流体セルとし、これまでと同様に扱う。一方全く流体を含まないセルを空隙セルとし、計算では考慮しない。そして、両者の間に位置し、流体を一部含むセルを界面(Interface)セルとし、特別な操作を行う。

## b) 界面セルの判定と変換

密度 $\rho$ および、粒子分布関数から求められる質量 $m$ を比較し、界面セルが「流体で満たされた ( $m > \rho$ )」か「空になった ( $m < 0$ )」かを判断し、セルの状態を変換する。このようにして界面セルを追跡することで自由表面の位置を追跡する。

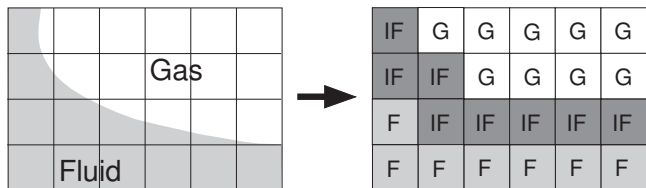


図-2 自由表面の表現 (F: 流体, IF: 界面, G: 空隙)

## 3. 数値計算例

### (1) 水滴の落下

図-3のように、水滴が落下し、静水面に衝突する挙動を2次元計算で再現した。計算パラメータは、 $\Delta x = 0.00003(\text{m})$ ,  $\Delta t = 0.00001(\text{s})$ ,  $\tau = 0.533$  (動粘性係数 $\nu = 1 \times 10^{-6}(\text{m}^2/\text{s})$ ), 重力加速度 $g = 9.81(\text{m}/\text{s}^2)$ とし、セル数は $250 \times 250$ とした。境界条件にはbounce-back条件(no-slip条件)を用いた。

水滴は徐々に加速し、静水面に衝突すると水面が跳ね上げられる。その衝撃により水面は押し下げられ、一方跳ね上げられた水面は、先端部が丸く分裂しながら飛び出す。その後水は中央へ集まり、水面が押し上げられる。以上のように、衝撃により大きく変化する水面や分裂して飛び散る水滴など、一連の水の挙動を適切に再現することができた。

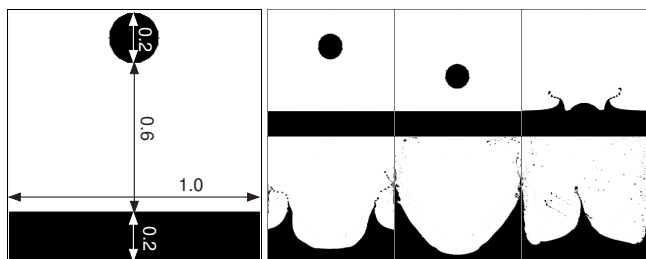


図-3 水滴の落下

### (2) 水柱の崩壊

図-4のように、左半分を水槽の半分の高さまで水で満たした状態から、中央の仕切り板を瞬時に取り除くことで、水柱が崩壊する様子を2次元計算で再現した。四方の壁面境界にはbounce-back条件を用いた。計算パラメータは $\Delta x = 0.00004(\text{m})$ ,  $\Delta t = 0.00001(\text{s})$ ,  $\tau = 0.518$  (動粘性係数 $\nu = 1 \times 10^{-6}(\text{m}^2/\text{s})$ ), 重力加速度 $g = 9.81(\text{m}/\text{s}^2)$ とし、セル数は $250 \times 250$ とした。

水柱が崩壊すると、勢いよく右側の壁面へ水塊が衝突し、大きく跳ね上がる。その際水滴が分裂し飛び散る。その後は空気を含みながら左側へ反射する波と、落下する水塊とが混ざり合い、複雑な挙動を見せる。以上のように定性的に見て概ね自然な動きを示しており、複雑に変化する水面を適切に表現することができた。

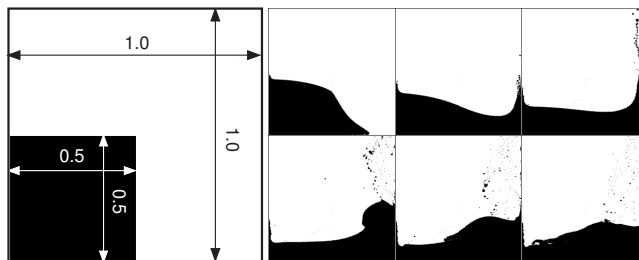


図-4 水柱の崩壊

## 4. 結論および今後の方針

LBMの断面二次元自由表面モデルを構築し、水滴の落下および水塊の崩壊現象の再現し、水滴が分裂する様や碎波等の複雑に変化する水の挙動を概ね自然に再現することができた。本稿では、定性的な検証に留まったが、実現象との比較を行い精度を定量的に評価する必要がある。そのため今後は水槽を作成し水柱崩壊実験の検証データを得る予定である。

今回は、計算の安定条件の問題から非常に小さなスケールでの計算しか実施できなかった、今後は、市街地の津波氾濫流の高度な解析の実現に向けてのモデルの改良、平面二次元モデルとの統合によるHybridモデルの構築など、格子ボルツマン法の実用性向上のための更なる検討を行っていく予定である。

## 参考文献

- 後藤智明・小川由信 (1982) : Leap-frog法を用いた津波の数値計算法, 東北大学工学部土木工学科, 52p.
- 大家隆行・越村俊一・荒木健 (2008) : 格子ボルツマン法に基づく津波遡上シミュレーション手法の開発, 海岸工学論文集, 第55巻, pp. 221-225.
- Frandsen, J. B. (2008) : A 1-D Lattice Boltzmann model applied to tsunami runup onto a plane beach. Advances in coastal and ocean engineering, vol. 10, pp. 283-309.
- Thürey, N. (2007) : Physically based Animation of Free Surface Flows with the Lattice Boltzmann Method, University of Erlangen-Nuremberg, Ph.D. Thesis, 145p.