格子ボルツマン法による物体周りの流れの解析

東北大学　学生会員　○荒木　健
東北大学大学院　正 会 員　越村　俊一
東北大学大学院　学生会員　大家　隆行

1. はじめに

数値流体力学の分野において，格子ボルツマン法の研究が盛んに行われ，急速な発展を見せている．格子ボルツマン法は，流体を格子上を並進･衝突する仮想的な粒子の集合体ととらえ，格子上の粒子分布関数を用いて，質量･運動量保存則を満たすように流体の巨視的変数を求める手法である．有限差分法などの連続体としての流体の方程式を解く従来の手法と異なる新しい津波計算手法として注目されている．現在，浅水理論に基づいた格子ボルツマン法の検討が行われているが（大家ら，2007），津波現象を再現する上で構造物周りなど，流れの鉛直速度成分が無視できない場合も多い．そこで本研究ではNils(2007)に倣い，ナビエ・ストークス式に基づく格子ボルツマン法を物体周りの流れ場に適用し，格子ボルツマン法の津波計算への適用の有効性の検討への足がかりとする．

2. 格子ボルツマン法

Nils(2007)を参考に格子ボルツマン法の概要を述べる．

(1) 格子形状

空間は規則的な格子によって離散化され，粒子の運動はその格子に沿って有限な方向に制限される．断面二次元の格子形状には図-1の2次元9速度モデルが広く用いられている．粒子の速度$\mathbf{e}_i (i = 1, 2, ...9)$は，それぞれ$0 (i = 1)$，$e (i = 2, 3, 4, 5)$，$\sqrt{2}e (i = 6, 7, 8, 9)$となる．ここで，格子間隔$\Delta x$及び時間刻み幅$\Delta t$により$e = \Delta x/\Delta t$である．つまり1タイムステップ後に粒子は必ず格子点上に位置する．時刻t，位置$\mathbf{x}$でi方向の速度を持つ粒子の分布関数を$f_i(\mathbf{x}, t)$とする．

(2) 格子ボルツマン方程式

格子ボルツマン法は，仮想粒子の並進と衝突の二つの過程からなる．並進過程において，粒子は速度に応じた方向の隣接する格子点へと移動する．粒子分布関数fは次のように表せる．

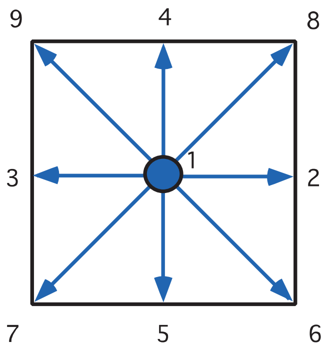

図-1　2次元9速度格子

$$f_i'(\mathbf{x}, t + \Delta t) = f_i(\mathbf{x} + \Delta t\mathbf{e}_i, t) \tag{1}$$

衝突過程は，粒子分布が単一割合で局所平衡状態へ近づくと仮定したBGKモデルを用いて次のように表せる．

$$f_i(\mathbf{x}, t + \Delta t) = (1 - \omega) f_i'(\mathbf{x}, t + \Delta t) + \omega f_i^{eq} \tag{2}$$

ここで，$\omega = 1/\tau$であり，τは単一時間緩和係数である．τにより流体の平衡状態へ達する速さが決まる．またf^{eq}は局所平衡状態における粒子分布関数である．

(3) 局所平衡分布関数

局所平衡状態とは，ある格子点で粒子の出入りの収支が一致する状態のことである．局所平衡分布関数はマクスウェル分布を$\mathbf{u}$についてテイラー展開することで求められ，次のようになる．

$$f_i^{eq}(\mathbf{x}, t) = w_i\rho[1 - \tfrac{3}{2}(\mathbf{u})^2 + 3(\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{u}) + \tfrac{9}{2}(\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{u})^2]$$
$$\text{ここで}, w_i = \begin{cases} 4/9 & (i = 1) \\ 1/9 & (i = 2 \sim 5) \\ 1/36 & (i = 6 \sim 9) \end{cases} \tag{3}$$

(4) 巨視的変数

各セルの密度ρ，流速$\mathbf{u}$は粒子分布関数から次式を用いて求められる．

$$\rho = \sum_i f_i \tag{4}$$

$$\mathbf{u} = \sum_i \mathbf{e}_i f_i/\rho \tag{5}$$

(5) 境界条件

a) bounce-back条件

壁面と隣接する流体セルにおいて，壁面から流体へ流れる方向の粒子分布関数は式（1）では求めることができない．そこで，次のbounce-back条件を用いる．図(1）において下部に壁面が存在する場合，f_4，f_8，f_9を求める．bounce-back条件は粒子を壁面で180°跳ね返すもので，次式で表される．壁面の隣のセルでは運動量が0になり，no-slip条件の一種である．

$$
\begin{aligned}
f_4(\mathbf{x}, t + \Delta t) &= f_5(\mathbf{x}, t)\\
f_8(\mathbf{x}, t + \Delta t) &= f_7(\mathbf{x}, t) \qquad (6)\\
f_9(\mathbf{x}, t + \Delta t) &= f_6(\mathbf{x}, t)
\end{aligned}
$$

b) 周期境界条件

左右の境界において，流出境界から流れ出る粒子を流入境界から流れ込み，逆に流入境界から流れ出る粒子は流出境界へ流れ込む周期境界条件を適用する．流入境界においての$f_i(\mathbf{x}_{in}, t+\Delta t)(i = 2, 6, 8)$，および流出境界での$f_i(\mathbf{x}_{out}, t+\Delta t)(i = 3, 7, 9)$，はそれぞれ式（7）および式（8）を用いて求める．

$$f_i(\mathbf{x}_{in}, t + \Delta t) = f_i(\mathbf{x}_{out}, t), \qquad i = 2, 6, 8 \qquad (7)$$

$$f_i(\mathbf{x}_{out}, t + \Delta t) = f_i(\mathbf{x}_{in}, t), \qquad i = 3, 7, 9 \qquad (8)$$

3. 計算条件

図-2のような領域を対象にして計算を行った．上下の壁面及び正方形物体の境界にはbounce-back条件を用い，左右の流入流出境界では周期境界条件を用いた．また初期条件としては全格子点にx方向流速 $u_x = 0.6$(m/s) ($Re = 100$)を与えた．

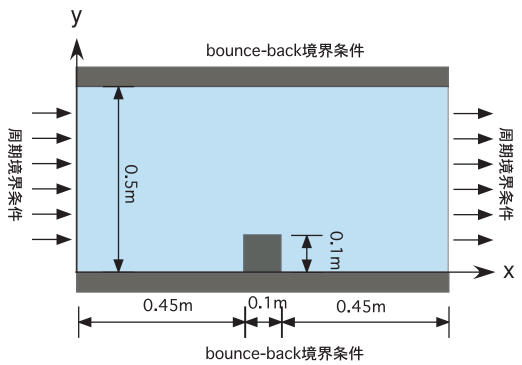

図-2　定義図

4. 結果

まず正方形物体を配置せずに，二次元poiseulle流れに適用し，モデルの精度を検証した．図-3のように理論解と同様に流速の放物線分布を得ることができた．

次に正方形物体を配置すると，図-4および5のような流速図を得た．正方形物体に沿うような流れが見られた．なお流速は無次元化して示している．

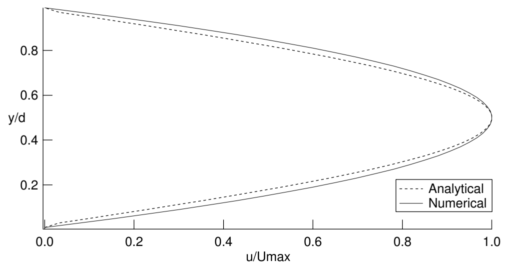

図-3　二次元poiseulle流れの流速分布

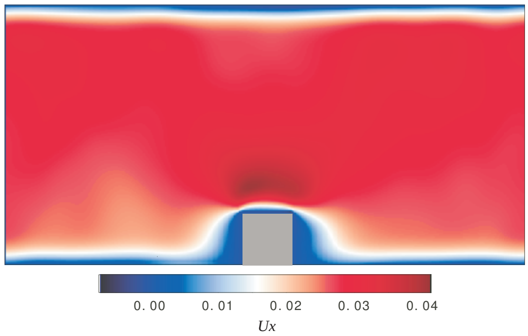

図-4　x方向流速(t=1s)

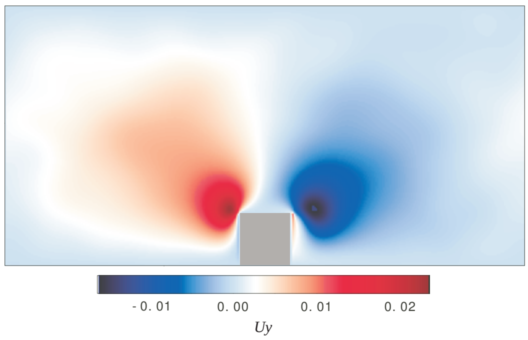

図-5　y方向流速(t=1s)

5. 結論

格子ボルツマン法の断面二次元モデルの精度をpoiseulle流れで検証した．また，例として正方形物体周りの流れの再現計算を行った．今後は三次元計算及び自由表面流れの計算へと発展させ，解析を行っていく予定である．

参　考　文　献

大家隆行，越村俊一，今村文彦，ダムブレイク問題における格子ボルツマン法の適用性に関する一考察，土木学会東北支部技術研究会講演概要集，II-33，2007.

Nils T., Physically based Animation of Free Surface Flows with the Lattice Boltzmann Method. University of Erlangen-Nuremberg, Phd-Thesis, 145p, 2007.