

Wigner 分布の特徴および津波水位変動等の非定常時間周波数解析への適用

泉宮 尊司*

1. 緒言

自然界において発生している殆どの諸現象は、時間と共に変化する所謂非定常な現象である。しかしながら、これらの現象の時間周波数変動特性を調べる際には、対象とする時間帯では定常であると仮定して、自己相関関数やスペクトル密度関数を算定する場合が殆どである。このような背景には、非定常な現象を適切に解析する手法が殆ど存在していなかったことが挙げられる。非定常な現象のスペクトル解析の歴史を辿ってみると、初期の段階では時間を短く区切って、その区間では定常であるとして、高速フーリエ変換を用いる方法¹⁾(STFT: Short-Time Fourier Transform)や最大エントロピー法(MEM: Maximum Entropy Method)²⁾が用いられてきた。また、基底関数として様々なウェーブレットを用いて、時変スペクトルを算定するウェーブレット法(WT: Wavelet Transform)^{3), 4)}が広く用いられてきた。しかしながら、これまでの方法では、時間分解能と周波数分解能が同時に十分に高いとは言えなかった。

近年、時変信号の有力な解析法の一つとして、Wigner 分布⁵⁾(WD: Wigner Distribution)が注目されている。この Wigner 分布は、1932 年に量子力学の分野において Wigner が提案した方法で Wigner-Ville 分布^{6), 7)}とも呼ばれていたが、その後しばらくの間他分野においては注目されることはなかった。しかしながら、1980 年代になって Claasen と Mecklenbrauker⁸⁾によって再発見がなされて、音声信号処理等の分野で注目を集めるようになってきた。本論文では、この Wigner 分布の長所・欠点等の特徴について再整理し、非

定常時系列の代表的なチャープ信号解析に Wigner 分布を適用する。また、Wigner 分布の欠点であるクロス項を抑制する機能を持つ Choi-Williams 分布^{9), 10)}についても紹介する。さらに、非定常時系列である津波水位変動についても Wigner 分布および Choi-Williams 分布を適用し、スペクトルおよび卓越周波数の時間変化特性を調べることにする。

2. Wigner 分布の特徴

時系列 $x(t)$ の自己 Wigner 分布 $W(t, f)$ は、次式で定義される^{1), 9)}。

$$W(t, f) = \int_{-\infty}^{\infty} x\left(t + \frac{\tau}{2}\right) x^*\left(t - \frac{\tau}{2}\right) e^{-j2\pi f\tau} d\tau$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \psi(t, \tau) e^{-j2\pi f\tau} d\tau \quad (1)$$

ここに、 t は時間、 f は周波数、 j は純虚数、*印は共役複素数である。時系列 $x(t)$ を複素数まで拡張する(これを解析関数という)理由は、後ほど説明することにする。上式の被積分関数 $\psi(t, \tau)$ は、

$$\psi(t, \tau) = x\left(t + \frac{\tau}{2}\right) x^*\left(t - \frac{\tau}{2}\right) \quad (2)$$

自己相関関数の時間平均操作を省いたものであり、非定常自己相関関数と呼ばれている。定常時系列における自己相関関数 $C(\tau)$ は

$$C(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) x(t - \tau) dt \quad (3)$$

と表され、スペクトル密度関数 $S(f)$ と Wiener-Khintchine の関係式で表される¹¹⁾。

$$S(f) = \int_{-\infty}^{\infty} C(\tau) e^{-j2\pi f\tau} d\tau \quad (4)$$

* Freelance Researcher

式 (1) および式 (4) の関係を見比べてみると、Wigner 分布は非定常な時系列に対して、瞬時のパワースペクトルを求めようとしたものであり、Wiener-Khinchine の関係式を非定常過程にまで拡張したものと見なすことができる。このことから、式 (1) で表される Wigner 分布を、Wigner スペクトルあるいは Wigner 変換と言っても良さそうであるが、伝統的に Wigner 分布 (Wigner distribution) と呼ぶのが一般的である。これは、Wigner⁵⁾ が確率変数に対してこの関係式を導入したことから、Wigner 分布は負値も取り得ることからかも知れない。

Wigner 分布には、長所・欠点を含めて様々な特徴がある。まず、Wigner 分布 $W(t, f)$ の時間平均を取ると、 $x(t)$ が定常エルゴート過程と見なせる場合には、

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} W(t, \tau) dt = \int_{-\infty}^{\infty} C(\tau) e^{-j2\pi f \tau} d\tau = S(f) \quad (5)$$

となり、スペクトル密度関数 $S(f)$ に等しくなることが分る。また、周波数 f で積分すると、

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty}^{\infty} W(t, f) df \\ &= \iint_{-\infty}^{\infty} x\left(t + \frac{\tau}{2}\right) x^*\left(t - \frac{\tau}{2}\right) e^{-j2\pi f \tau} d\tau df \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \delta(\tau) x\left(t + \frac{\tau}{2}\right) x^*\left(t - \frac{\tau}{2}\right) d\tau \\ &= |x(t)|^2 \end{aligned} \quad (6)$$

なる関係式が得られる。上式の意味することは、Wigner 分布を周波数で積分すると、各時刻における瞬時のパワーに等しくなることである。さらに、Wigner 分布を周波数および時間で積分すると、

$$\iint_{-\infty}^{\infty} W(t, f) df dt = \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt = E \quad (7)$$

となり、全エネルギー E に一致する。

時間および周波数で積分した関係式 (5) および式 (6) は、周辺分布条件と呼ばれ、Wigner 分布にとって重要な関係式であるが、この周辺分布条件を満たす全てが非負値の Wigner 分布は存在しないことが示されている⁵⁾。すなわち Wigner 分布は、負値も取り得るものである。このことが、Wigner 分布を Wigner スペクトルと呼ばない所以かも知れない。

Wigner 分布のもう一つ重要な関係式として、逆変換が存在し、それは次式で表される¹⁾。

$$x(t) = \frac{1}{x^*(0)} \int_{-\infty}^{\infty} W(t/2, f) e^{j2\pi f t} df \quad (8)$$

上式は、非定常過程の信号を作成するのに重要な関係式で、Wigner 分布 $W(t/2, f)$ を与えることによって、そのフーリエ逆変換により非定常信号が得られることを示している^{12), 13)}。

このように Wigner 分布は、既存の方法と比べて優れた特徴をもつ反面、負値をとることおよびクロス項の影響が現れるという欠点を持っている。クロス項とは、時間・周波数平面上において、2つの相異なる信号成分 $A(t)$ および $B(t)$ があるとき、それらの干渉項のことである。すなわち、Wigner 分布は、

$$\begin{aligned} W(t, f) &= \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ A\left(t + \frac{\tau}{2}\right) + B\left(t - \frac{\tau}{2}\right) \right\} \\ &\times \left\{ A^*\left(t + \frac{\tau}{2}\right) + B^*\left(t - \frac{\tau}{2}\right) \right\} e^{-j2\pi f \tau} d\tau \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ A\left(t + \frac{\tau}{2}\right) A^*\left(t - \frac{\tau}{2}\right) \right\} e^{-j2\pi f \tau} d\tau \\ &+ \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ B\left(t + \frac{\tau}{2}\right) B^*\left(t - \frac{\tau}{2}\right) \right\} e^{-j2\pi f \tau} d\tau \\ &+ \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ A\left(t + \frac{\tau}{2}\right) B^*\left(t - \frac{\tau}{2}\right) \right\} e^{-j2\pi f \tau} d\tau \\ &+ \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ B\left(t + \frac{\tau}{2}\right) A^*\left(t - \frac{\tau}{2}\right) \right\} e^{-j2\pi f \tau} d\tau \end{aligned} \quad (9)$$

となる¹⁴⁾。上式において、右辺第 1 項およ

び第2項が自己 Wigner 分布であり、右辺第3項と4項がクロス項と呼ばれるものである。もし、 N 個の相異なる信号成分が存在すれば、 (N^2-N) 個のクロス項が出現することになる。このクロス項の存在が Wigner 分布を複雑なものにし、使いづらいものとしている。したがって、このクロス項を如何にして除去するかが、Wigner 分布の利点を生かす上で重要な処理であると言っても過言ではない^{14), 15), 16), 17)}。

クロス項の中で τ に依存しない周波数 0 の直流成分も発生するが、信号が実信号の場合には、正負の周波数領域で対称なパワースペクトルを持つため、必ず周波数 0 のクロス項が発生する。この周波数 $f=0$ のクロス項をなくし、負の周波数をもつ信号との干渉をなくすために、一般に以下に示す解析関数 $z(t)$ を用いる⁹⁾。

$$z(t) = x(t) + \frac{j}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x(\tau)}{t-\tau} d\tau \quad (10)$$

上式の右辺第2項の虚数部は、 $x(t)$ をヒルベルト変換したものであり、元の信号の位相を 90° シフトさせる効果をもつ変換である。ここで、 $x(t)$ のヒルベルト変換したものを $x_H(t)$ 、そのフーリエ変換を $X_H(f)$ とおくと、

$$\begin{aligned} X_H(f) &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\pi} \frac{x(\tau)}{t-\tau} e^{-j2\pi ft} d\tau dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\pi t} * x(t) e^{-j2\pi ft} dt \\ &= -j \operatorname{sgn}(f) X(f) \end{aligned} \quad (11)$$

となる。ここに、 $X(f)$ は $x(t)$ のフーリエ変換、 $\operatorname{sgn}(f)$ は、符号関数であり、

$$\operatorname{sgn}(f) = \begin{cases} 1, & f > 0 \\ 0, & f = 0 \\ -1, & f < 0 \end{cases} \quad (12)$$

である。式 (11) の関係より、解析関数の虚数部のフーリエ変換は、実関数 $x(t)$ のフーリエ変換 $X(f)$ から容易に求められる。し

たがって、解析関数 $z(t)$ のフーリエ変換 $Z(f)$ は、

$$Z(f) = X(f) + \operatorname{sgn}(f)X(f) = \begin{cases} 2X(f), & f > 0 \\ X(f), & f = 0 \\ 0, & f < 0 \end{cases} \quad (13)$$

となる。したがって、上式より解析関数のフーリエ変換 $Z(f)$ の負の周波数の成分は 0 であり、この成分とのクロス項は生じないことになる。このことにより、クロス項を半分に減らすことができる。解析関数を得るには、高速フーリエ変換で得た $X(f)$ を用いて、式 (13) より解析関数のフーリエ変換 $Z(f)$ を求めて、その逆フーリエ変換により $z(t)$ を求めることができる。

実信号 $x(t)$ をヒルベルト変換した $x_H(t)$ は、位相の変化があるのみであるため、その自己相関関数およびパワースペクトルは、実信号 $x(t)$ のそれと全く同一であり、以降 $z(t)$ の代わりに複素信号 $x(t)$ を用いることにする。

3. 離散的 Wigner 分布の計算法

図 1 は、離散データを高速フーリエ変換 FFT 法を用いた際のフーリエ係数の設定法を図示したものである。まず、 2^n 個の実関数の信号 $x(t)$ をフーリエ変換し、その結果は図に示しているように、0 番地に周波数 $f=0$ の係数、1 番から $2^{n/2}$ 番までが正の周波数の係数、 $2^{n/2}+1$ 番から 2^n-1 までに負の周波数の係数が格納される。したがって、解析関数のフーリエ変換係数は、式 (13) よりそれぞれ 1 倍、2 倍および 0 倍して求められ、解析関数はそのフーリエ逆変換により算定される。ただし、正の周波数でも Nyquist 周波数の $2^{n/2}$ 番の係数は、1 倍することに注意しなければならない。

非定常な時系列に対して離散的 Wigner 分布を求める際には、時間および周波数分解能を高めるために、ある適切な長さの時間窓を採用して算定する必要がある。また、Wigner

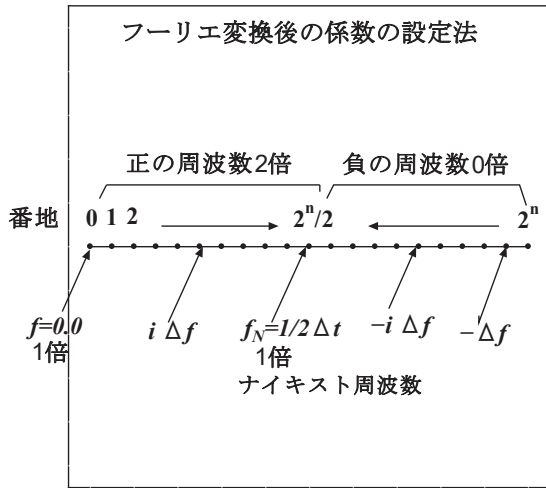


図 1 FFT による解析関数のフーリエ変換の係数の設定法

分布の定義式では、 $\tau/2$ 時間の値が必要であるが、それを次式のように変換して、

$$W(t, f/2) = \int_{-\infty}^{\infty} 2x(t + \tau)x^*(t - \tau)e^{-j2\pi f\tau} d\tau \quad (14)$$

$t \pm \tau$ 時間の値で計算できるようにする。なお、Wigner 分布 $W(t, f/2)$ は、 $f/2$ の値であることに注意しなければならない。

離散的 Wigner 分布は、式 (14) の離散的フーリエ変換を用いて、次式で与えられる⁸⁾。

$$W(n, k) = \sum_{m=-\frac{N}{2}+1}^{\frac{N}{2}} 2x(n+m)W(m) x^*(n-m) W^*(-m)e^{-j2\pi mk/N} \quad (15)$$

ここに、 $W(m)=W(m\Delta\tau)$ は時間窓であり、 $t=n\Delta t$ である。時間窓は、数多くのものが提案されているが、よく用いられている hamming 窓¹¹⁾ (実関数) を例として以下に示す。

$$W(m) = 0.54 + 0.46\cos\left(\frac{2\pi m}{N}\right) \quad (16)$$

離散的 Wigner 分布に用いられる時間窓は、信号と同じく以下の解析関数が用いられている。

$$W(m) = 0.54 + 0.46e^{j\frac{2\pi m}{N}} \quad (17)$$

離散的 Wigner 分布は、式 (15) のフーリエ変換により求められるが、式 (14) の関係からも明らかなように、ナイキスト周波数の半分までの周波数しか計算できないことに注意しなければならない。

また離散的 Wigner 分布を計算する際には、時間幅は短いほど、非定常性を取り入れ易いが、逆に周波数分解能が低下するため、ある適切なラグ時間を設定する必要がある。これを決めるには、サンプリング周波数、現象の卓越周波数およびパワーの時間変化率に依存してくるものであり、一般的な関係式等は明らかになっていないが、データ数を N として、 $N=64, 128$ および 256 等が採用されている場合が多いようである。

4. Wigner 分布のチャープ信号への適用

Wigner 分布の時間および周波数分解能を調べるために、時間的に周波数に変化するチャープ信号に対して解析を試みる。用いたチャープ信号は、大塚ら¹⁸⁾ と同様な信号で、

$$x(t) = 0, \quad (0 \leq t \leq 200)$$

$$x(t) = \sin\left\{\frac{\pi(t-200)^2}{3200}\right\}, \quad (200 \leq t \leq 1000) \quad (18)$$

である。 $(200 \leq t \leq 1000)$ において、この信号の解析関数を考え、Wigner 分布の定義式に代入すると、

$$W(t, f) = \int_{-\infty}^{\infty} x\left(t + \frac{\tau}{2}\right)x^*\left(t - \frac{\tau}{2}\right)e^{-j2\pi f\tau} d\tau = \delta\left(f - \frac{(t-200)}{3200}\right) \quad (19)$$

となる関係式を得る。ここに、 δ はデルタ関数である。この結果は、卓越周波数が時間に比例して変化していることを示しており、理論的な周波数と一致している。

図 2 は、式 (18) で示されるチャープ信号をサンプリング周波数 1Hz として図示した

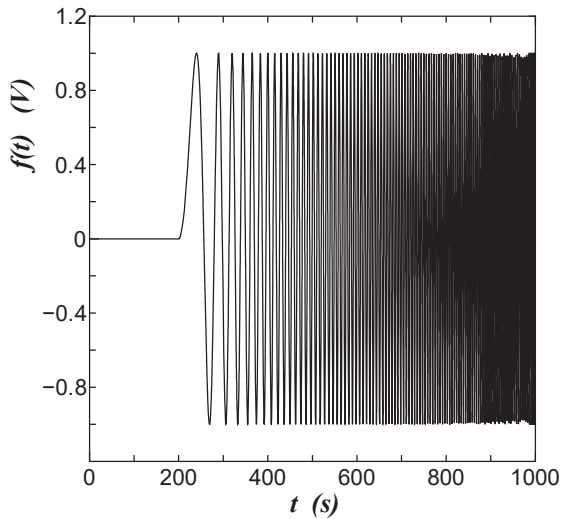
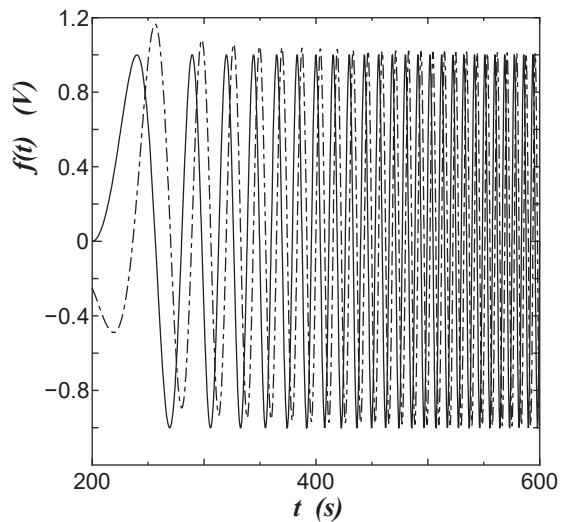


図2 チャープ信号

図3 チャープ信号の解析信号
(実線：実数部，一点鎖線：ヒルベルト変換)

ものである。時間と共に周波数が高くなっているのが分る。このチャープ信号を高速フーリエ変換によりフーリエ係数を求め、それを用いて式 (13) より解析信号のフーリエ係数を求める。その逆フーリエ変換により解析関数を求めたものが、図3である。実信号をヒルベルト変換した一点鎖線で示される虚数部は、振幅がほぼ同一で位相がずれているのが分る。

しかしながら、詳しくみると約 260s での振幅がやや大きくなっている。これは、200s から振幅 1 の正弦波をいきなり入力しているため、一種の弱い Gibbs 現象が発生している

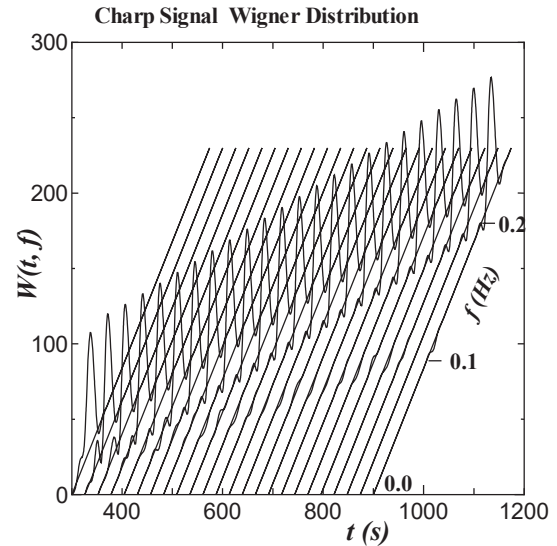


図4 チャープ信号の Wigner 分布

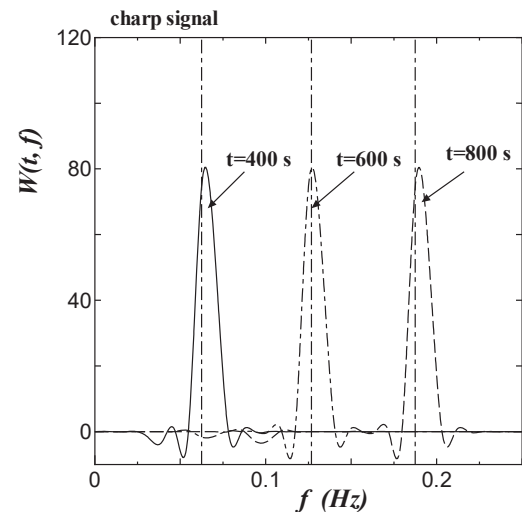


図5 チャープ信号の卓越周波数と Wigner 分布との比較

のではないかと考えられる。

図3で示される解析関数を用いて、Wigner 分布を算定した結果を図4に示している。この結果は、時間窓として幅 128 点 ($N=128$, $\Delta t = 1s$) の hamming 窓を用いて、25s 毎に計算されたものである。Wigner 分布のピーク周波数は、時間に比例して変化しており、その形状は鋭く尖ったものとなっている。

チャープ信号の周波数と Wigner 分布のピーク周波数を比較したのが、図5である。Wigner 分布の理論値は、式 (19) で示される δ 関数であるが、実際の計算においては有限幅の時間窓を用いているので、 δ 関数には

ならないが、鋭く尖った形状をしている。また、ピーク周波数も理論値（縦の一点鎖線）とほぼ一致していることが分る。なお、詳しくみると Wigner 分布は負値を示している周波数があるが、これは有限幅の時間窓を用いていること以外に、Wigner 分布自体が持つ特性でもある。

5. Cohen クラスとクロス項の抑制

Wigner 分布は、4 に示したように時間および周波数の分解能が高いが、相異なる周波数成分が含まれる場合には、クロス項が出現して不要な変動成分が現れる。この成分を取り除くことが、Wigner 分布の長所を生かすのに不可欠である。

Cohen は、クロス項を抑制するために、Wigner 分布 $W(t, f)$ と 2 変数関数 $\Phi(t, f)$ の 2 重畳み込み積分で表現し、平滑化することを考えた^{1), 9), 19)}。

$$\begin{aligned} C(t, f) &= W(t, f) * \Phi(t, f) \\ &= \iint_{-\infty}^{\infty} W(t', f') \Phi(t - t', f - f') dt' df' \end{aligned} \quad (20)$$

ここに、 $\Phi(t, f)$ は核関数であり、上式で表される $C(t, f)$ の集合は、現在ではコーエンクラス (Cohen's class) と呼ばれている。Wigner 分布 $W(t, f)$ 自体は、核関数がデルタ関数 $\Phi(t, f) = \delta(t) \delta(f)$ で表される特殊なものである。ここで核関数の 2 次元 Fourier 変換した関数を $\varphi(\theta, \tau)$ と置くと、

$$\varphi(\theta, \tau) = \iint_{-\infty}^{\infty} \Phi(t, f) e^{-j(\theta t - 2\pi \tau f)} dt df \quad (21)$$

であり、式 (20) を関数 $\varphi(\theta, \tau)$ を用いて書換えると、

$$\begin{aligned} C(t, f) &= \iiint_{-\infty}^{\infty} e^{-j(\theta t + 2\pi f \tau - \theta u)} \varphi(\theta, \tau) \cdot \\ & x\left(t + \frac{\tau}{2}\right) x^*\left(t - \frac{\tau}{2}\right) du d\tau d\theta \end{aligned} \quad (22)$$

となる。この関数 $\varphi(\theta, \tau)$ も Claasen と Mecklenbrauker⁸⁾ によって核関数と呼ばれている。ちなみに、Wigner 分布の場合には $\varphi(\theta, \tau) = 1$ である。

ここで課題は、周辺条件および全エネルギー条件を満たし、可能な限りクロス項を抑制する核関数 $\varphi(\theta, \tau)$ を求めることにある。数多くの研究者が研究を行い、様々な核関数が提案されている。その中でも性能の比較的高い 2 つを挙げておく。1 つ目は、Choi-Williams 分布²⁰⁾ で、核関数は次式で与えられる。

$$\varphi(\theta, \tau) = \exp\left\{-\frac{\theta^2 \tau^2}{\sigma}\right\} \quad (23)$$

ここに、 σ はパラメタであり、 $\sigma \rightarrow \infty$ で Wigner 分布となる。もう 1 つは、Zhang-Sato 分布²¹⁾ で、核関数は、

$$\varphi(\theta, \tau) = \exp\left\{-\frac{\theta^2 \tau^2}{\sigma}\right\} \cos(\beta \theta \tau) \quad (24)$$

である。ここに、 σ と β はパラメタであり、 β を 0 とすると、Choi-Williams 分布に一致する。これら 2 つの分布は、正值条件は満たさないものの、周辺条件および全エネルギー条件を満たし、クロス項を効果的に抑制できることが知られている。

本研究では、クロス項を抑制する分布として、Choi-Williams 分布を採用し、津波水位変動にそれを適用して、非定常時間周波数特性を調べることにする。Choi-Williams 分布 $W_{CW}(t, f)$ は、式 (23) を式 (22) に代入し、積分を実行すると、

$$W_{CW}(t, f) = \iint_{-\infty}^{\infty} \sqrt{\frac{\sigma}{4\pi\tau^2}} \exp\left\{\frac{(t-\mu)^2}{4\tau^2/\sigma}\right\} x\left(\mu + \frac{\tau}{2}\right) x^*\left(\mu - \frac{\tau}{2}\right) \cdot e^{-j2\pi f\tau} d\mu d\tau \quad (25)$$

となる^{10), 22)}。上式の関係を離散化し、時間窓 $W(m)$ を用いて表すと、

$$\cdot e^{-j\frac{2\pi km}{N}} \sum_{\mu=-M}^{\mu=M} \sqrt{\frac{\sigma}{4\pi m^2}} e^{-\left(\frac{\sigma\mu^2}{4m^2}\right)} \cdot x(\mu + n + m) x^*(\mu + n - m) \quad (26)$$

となる。ここに、 $t=n\Delta t$, $\tau=m\Delta t$, および $i'=m\Delta t$ である。なお、時間窓には hamming 窓を用いた。

6. 津波水位変動の非定常時間周波数解析

地震や海底すべりによって発生する津波は、時間と共に振幅や卓越周波数が変化する正に非定常な時系列である。しかしながら、これまでの津波水位変動の解析では、定常過程としてスペクトル解析が行われており、どの時間帯にある特定の周波数の変動が卓越していたかは明確には分らなかった。本研究では、このような非定常な津波水位変動に対して、Wigner 分布およびその欠点を改善した Choi-Williams 分布を算定し、その適用性を検討する。

(1) 須崎における東北地方太平洋沖地震

2011年3月11日14時46分頃、三陸沖を震源として東北地方太平洋沖地震が発生した。この地震のモーメントマグニチュード M_w は 9.0 と推定され、日本観測史上最大の巨大地震であった²³⁾。この地震によって発生した津波は、東北地方太平洋沿岸を中心として、北海道から関東地方だけでなく日本列島の太平洋沿岸に大きな影響を及ぼした。

ここでは、まず波源域からやや遠方である高知県須崎における津波波形の解析を試みることにする。この地点を最初に選んだ理由は、

津波波形の変動が比較的緩やかであり、変動周期・周波数の変化も緩やかであるためである。

図6は、須崎における津波水位波形(実線)とそのヒルベルト変換である水位変動(一点鎖線)を示している。水位変動の振幅は有意に変化しているが、その周期の変化は緩やかであることが読み取れる。津波波形は、約350minで切って使用したため、Gibbs現象の影響が現れるため、ヒルベルト変換である水位変動は50min以前では0となるように調整している。

図7は、時間窓の幅128点 ($N=128$, $\Delta t = 1\text{min}$) として、各時間におけるWigner分布を算定したものである。津波が須崎に到達した初期の頃 ($t=100\text{min}$) は、周期が約50min ($f=0.02\text{cycle/min}$) と長かったが、 $t=150\text{min}$ および $t=300\text{min}$ の時間帯では、周期が約33~35minと短くなり、振幅も最大となっている。

図8は、津波水位変動の Choi-Williams 分布を求めたものである。 $\sigma=3.0$ の分布を示したもので、Wigner 分布よりも2~3割程度小さい値を示しているが、 σ の値を大きくすればより Wigner 分布に近い分布が得られる。 $T=100\text{min}$ では、両者の分布の違いが見られる。これは津波到着初期の波形であり、クロス項の影響が出始めているものと推察される。他の時間帯においては、周波数 $f=0.03\text{ cycle/min}$ (周期約33min) の変動が卓越していることが分る。

梅田ら²⁴⁾は、高知県須崎湾で潮位観測を実施し、東北地方太平洋沖地震津波の3日後には、周期85, 73, 51, 47, 37, 32, および26minのエネルギーピークの周期を観測している。しかしながら、通常のスเปクトル解析で求められたもので、どの時間帯にどの周期の津波が励起しているかは不明である。なお、荒天時には85, 57, 47, 37, 32, および25minのエネルギーピーク周期が、好天時には85, 49, 34, 31, 26minの周期の長周期波が観測されている。これら何れの時にも発生しているのは、85minの長周期波である。この周期の長

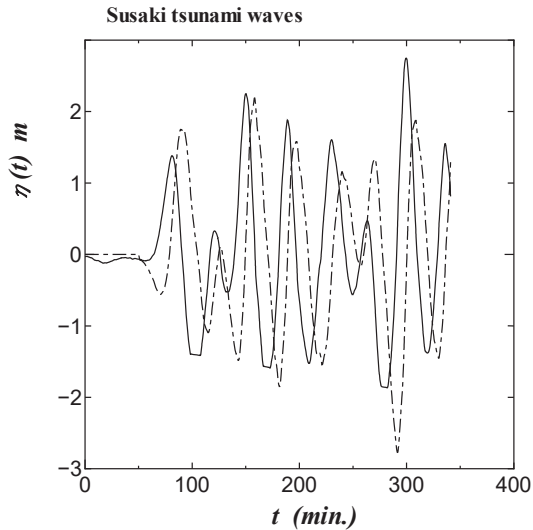


図6 須崎の津波水位波形の解析関数

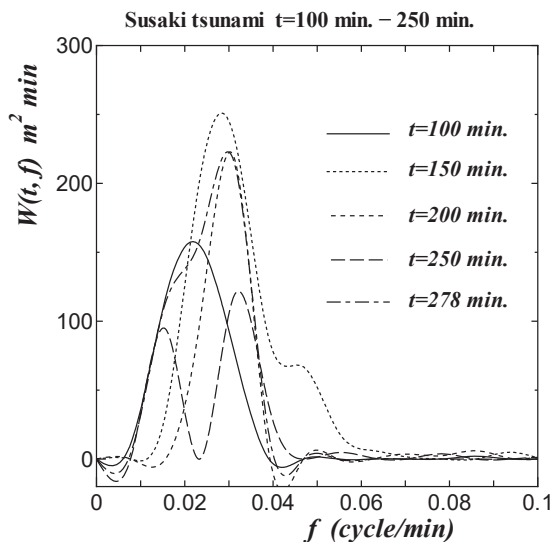


図7 須崎の津波水位波形の Wigner 分布

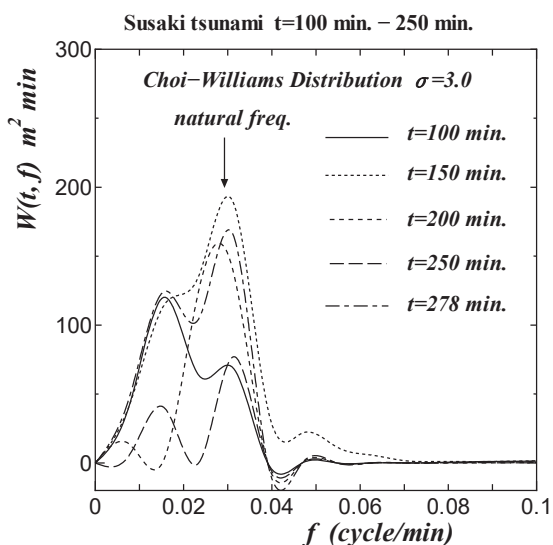


図8 須崎における Choi-Williams 分布

周期波は、陸棚セイシュと0次モードの陸棚エッジ波の可能性が高いと考えられる。今井ら²⁵⁾の計算結果とも符合するが、次数が異なるだけである。陸棚エッジ波の周期は、Ursell²⁶⁾やEckart²⁷⁾の分散関係式から、勾配 s が $s \ll 1.0$ の時には、

$$\sigma_n^2 = gk(2n+1)s, \quad (n = 0, 1, 2, \dots) \quad (27)$$

$$\frac{T_n}{T_0} = \frac{1}{\sqrt{2n+1}}, \quad \frac{f_n}{f_0} = \sqrt{2n+1} \quad (28)$$

なる関係式が成立する²⁸⁾。ここに、 $\sigma_n = 2\pi/T_n$ は n 次の角周波数、 k は波数、 s は陸棚の勾配、 T_0 は0次の周期、 f_0 は0次の周波数である。

0次モードの陸棚エッジ波の周期を $T_0 = 85 \text{ min}$ とすると、1次から3次のエッジ波の周期は、49min, 38min, および32minであり、梅田らの荒天時のピーク周期にほぼ一致している。したがって、荒天時の長周期波は0次から3次までの陸棚エッジ波である可能性が高いと推測される。

図8のChoi-Williams分布のピークに対応する33~35minの長周期波は、丁度須崎湾における共振周期に相当しており²⁹⁾、陸棚エッジ波の2次から3次モードの周期の間に対応している。須崎湾の共振により津波水位が最大となっているのは大変興味深いものである。

もう少し詳しく見るために、Choi-Williams分布の時間周波数における3次元分布および平面分布を図化したものが、図9および図10である。これらの図より、145minから225minの間に、周期34分前後の長周期波が発達し、津波水位変動が大きくなっていることが分る。また、225min以降は低周波数の陸棚セイシュの成分も復活してきている。

(2) 小名浜における2016年福島県沖地震津波

2016年11月22日に福島県沖でマグニチュード $M_w 6.9$ の地震が発生し、津波が東日本の太平洋沿岸に襲来した。この地震の断層の走向は、通常の地震断層のそれとは異なる

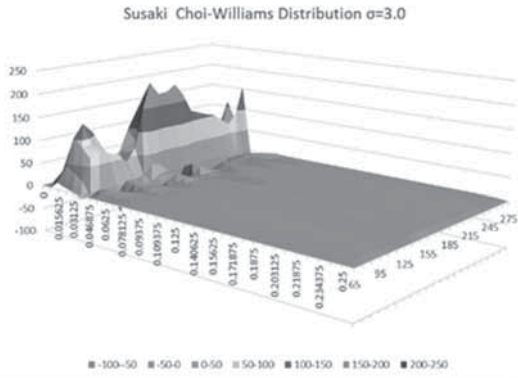


図9 須崎における Choi-Williams 分布の3次元表示

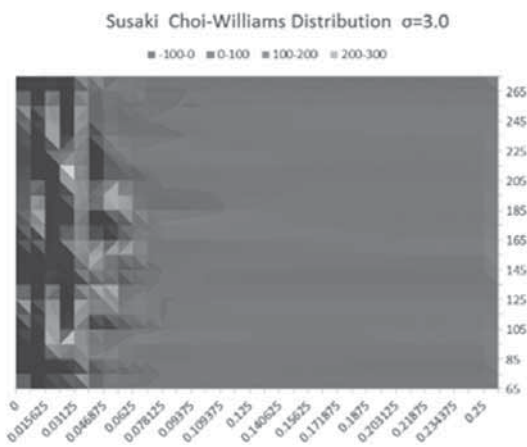


図10 須崎における Choi-Williams 分布の時間周波数平面表示

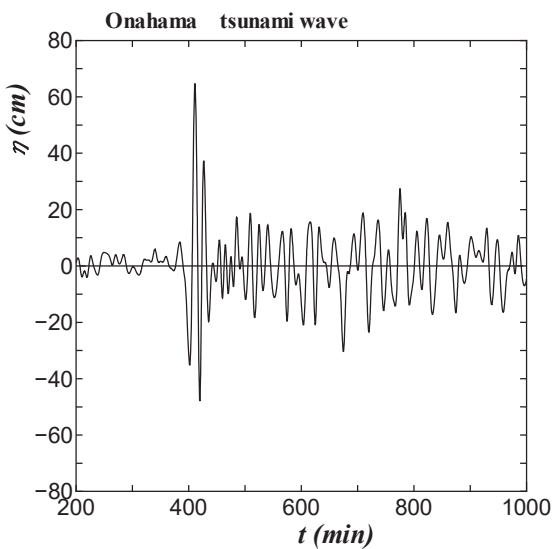


図11 福島県沖地震津波の波形(小名浜)

り、沿岸方向と約 60° の角度を有していたので、仙台湾沿岸に予想外の被害をもたらした³⁰⁾。

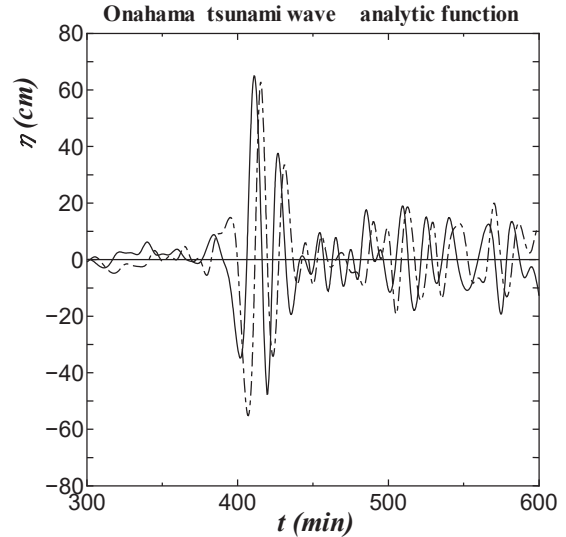


図12 小名浜の津波波形の解析関数

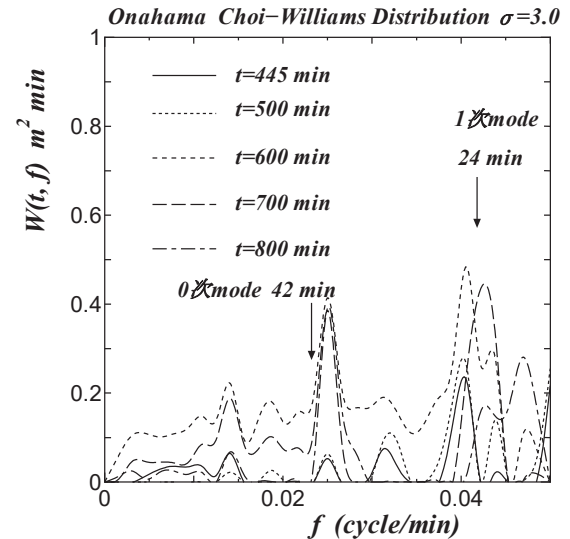


図13 小名浜の津波波形の Choi-Williams 分布 ($\sigma = 3.0$)

図11は、小名浜における津波水位変動を示したものである。最大で60cmを超える津波が小名浜にも襲来しているが、2～3波目以降は、20cm前後の変動が長時間続いている。この津波水位データは、サンプリング間隔が $\Delta t = 5\text{min}$ とやや長いので、ナイキスト周波数 $f_N = 1/2\Delta t = 0.1\text{min}^{-1}$ 、Wigner 分布の最大周波数は $f_{\text{max}} = 1/(4\Delta t) = 0.05\text{min}^{-1}$ 、したがって最小周期は20minと長く、Wigner 分布を算定するに最適なサンプリング周波数ではないが、ここに1例として示すことにする。

図12は、小名浜の津波水位波形の解析関

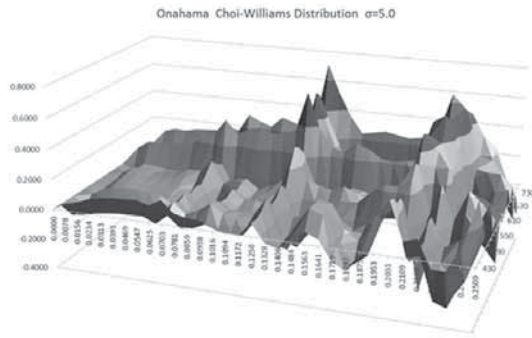


図 14 小名浜の津波波形の Choi-Williams 分布の 3 次元表示 ($\sigma = 5.0$)

数を図示したものである。この図の実線が解析関数の実数部、一点鎖線が虚数部である。データ総数 $N_T=256$ 、周波数分解能 $\Delta f=1/N_T\Delta t=0.00078125\text{min}^{-1}$ で十分であるため、この図に示されているように、虚数部は実波形に対して位相が 90° ずれた波形で振幅もほぼ同程度となっている。

図 13 は、ある特定の時間における津波水位変動の Choi-Williams 分布 ($\sigma=3.0$) を示したものである。この図には、スペクトル解析および陸棚地形から推定された陸棚エッジ波の 0 次および 1 次の周期 (それぞれ 42min, 24min) も示している。0 次モードの周期が 42min 付近には Choi-Williams 分布のエネルギーピークが、やや右側にずれて集中している。また、1 次モードの 24min 付近にもエネルギーの集中が見られる。この図より、津波到着約 100min 後の 500min 以降には陸棚波の 0 次および 1 次モードの振動が誘発され卓越していることが分る。

Choi-Williams 分布 ($\sigma=5.0$) の 3 次元表示をしたものが、図 14 である。この図からも、2つのエネルギーピークの峰が存在しており、それが丁度陸棚エッジ波の 0 次および 1 次モードに相当していることは、大変興味深いことである。

(3) 福島県沖における 2011 年東北地方太平洋沖地震津波

図 15 は、東北地方太平洋沖地震による福島県沖における津波波形を実線で、そのヒルベルト変換を一点鎖線で示している。急

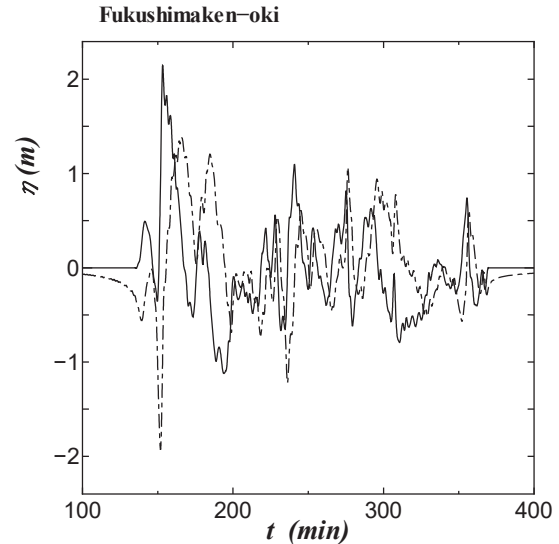


図 15 東北地方太平洋沖地震時の福島県沖における津波波形

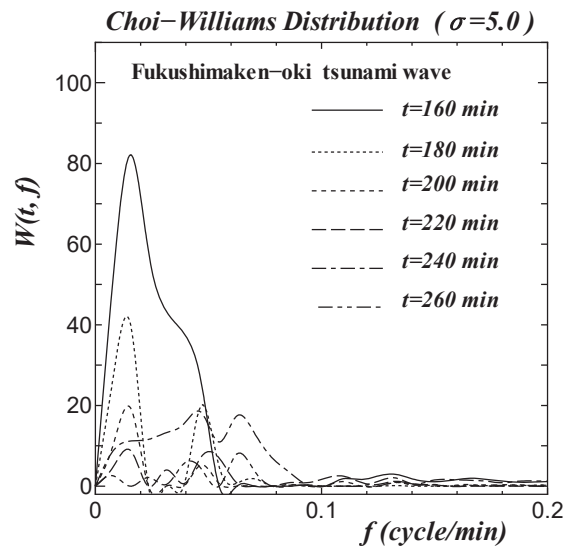


図 16 福島県沖の津波波形の Choi-Williams 分布 ($\sigma=5.0$)

激な水位変動があるために、フーリエ変換に Gibbs 現象ができるだけ発生しないように、解析する時間帯の両端は 0 のデータを置き換えている。このようにすることによって、ヒルベルト変換の値も両端で 0 に収束する傾向にあることが分る。

福島県沖の津波波形の各時間における Choi-Williams 分布 ($\sigma=5.0$) を示したものが、図 16 である。津波発生初期の第 2 波目に相当する $t=160\text{min}$ では、 $f=0.015\text{min}^{-1}$ 、周期約 60 分の津波が発達し、それが徐々に減衰し

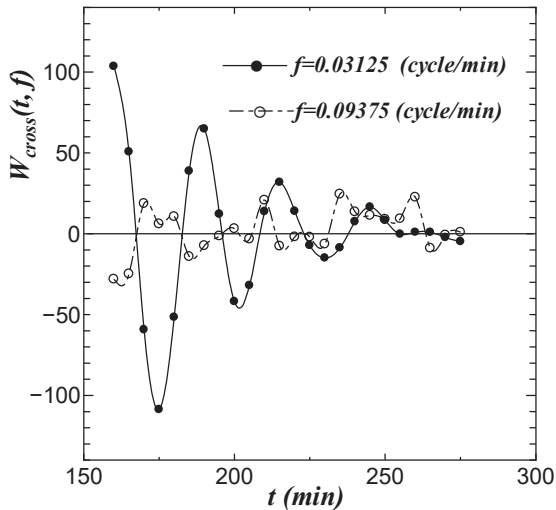


図 17 クロス項による Wigner 分布の時間的変化

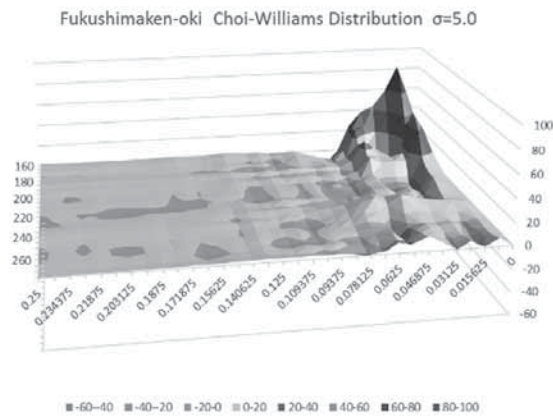


図 18 福島県沖の津波波形の Choi-Williams 分布 ($\sigma = 5.0$) の 3 次元表示

て行く様子が明確に読み取れる。それよりも高周波数側では $f=0.04\text{min}^{-1}$ 付近にピークが見られる。 $t=160\text{min}$ の Choi-Williams 分布は、それら 2 つのピークを包括する分布形をしている。この形状は、クロス項が含まれている可能性があるため、Wigner 分布の時間変化を調べることにした。

図 17 に、Wigner 分布の 2 つの周波数におけるスペクトル密度関数の時間変化を示している。クロス項は、式 (9) で与えられるように 2 つの周波数の平均周波数の Wigner 分布は、周波数の差の変調を受けているので、時間に対して激しく変動する性質がある。

周波数が $f=0.03125\text{min}^{-1}$ の Wigner 分布は、時間と共に規則的に変動しており、クロス項

の性質を有している。このことから、2 つのピーク周波数の平均値が $f=0.03125\text{min}^{-1}$ に近いものと推測される。一方、 $f=0.09375\text{min}^{-1}$ の方は、 $t = 160\text{min} \sim 200\text{min}$ の間ではやや規則的に符号が反転しており、クロス項の性質を有しているが、それ以降の時間帯はほぼ正の値が多く、不規則な変動をしているので、自己 Wigner 分布の可能性があると考えられる。したがって、周波数 $f=0.03125\text{min}^{-1}$ の Choi-Williams 分布も 0 と見なした方がよいと考えられる。

図 18 は、Choi-Williams 分布 ($\sigma=5.0$) の 3 次元表示をしたものである。この図においても、2 つのエネルギーのピークの峰が見られる。しかしながら、図 14 ほど明確ではない。これは、福島県沖の時間窓の幅が前者よりも短く、周波数分解能が低下していることや、福島県沖の方がより沖合いにあるため、陸棚エッジ波の 0 次および 1 次モードの水位変動がより小さかったためと考えられる。

(4) 周辺分布条件の適合性

Wigner 分布には、2. で述べたように 2 つの周辺分布条件があることを説明したが、有限の窓関数を用いた離散 Wigner 分布および Choi-Williams 分布では、どの程度成立するかは不明であった。本論文では、それらを確かめるべく、それらの分布の時間平均値とスペクトル密度関数との比較を行った。

図 19 は、各離散分布の時間平均値と FFT によるスペクトル密度関数とを比較したものである。●印および○印は、それぞれ離散 Wigner 分布および Choi-Williams 分布の時間平均値、実線は全時間帯のデータを FFT によりスペクトル密度関数を算定した結果である。離散分布の方は、負値も取り得るので値はそのまま用いている。Choi-Williams 分布の方は、 σ の値が 3 以上で時間平均値は Wigner 分布の結果とほぼ一致するため、やや値が異なる $\sigma=1.0$ のみを示している。

Wigner 分布の時間平均値は、負値を取っている領域もある（絶対値は小さい）が、FFT によるスペクトル密度関数にかなり類

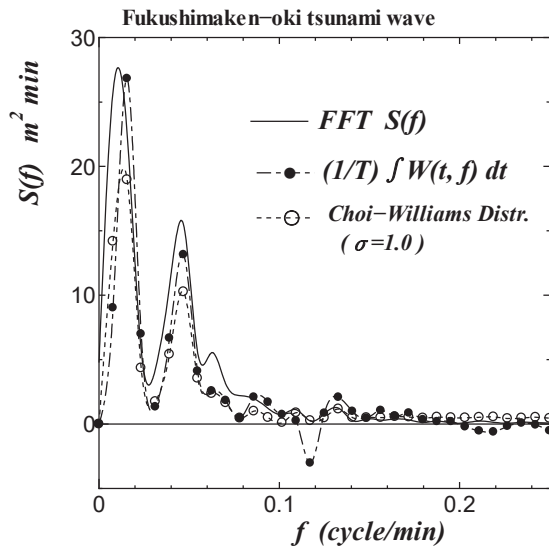


図 19 Wigner および Choi-Williams 分布の時間平均値とスペクトル密度関数

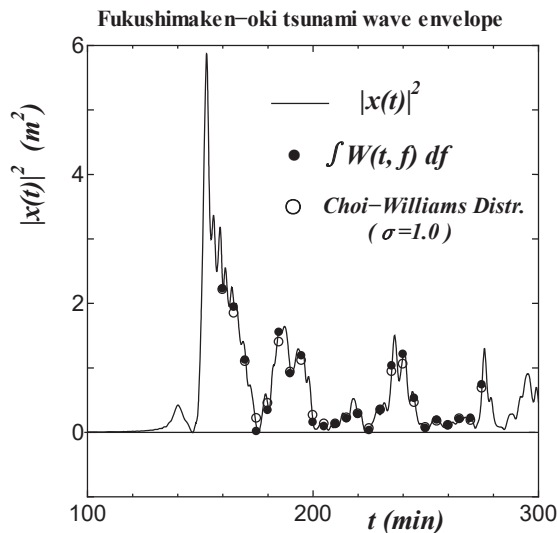


図 20 Wigner および Choi-Williams 分布の周波数積分値と $|x(t)|^2$

似した結果となっている。時間平均しても Wigner 分布の方は、負値を取っているのは窓関数のフーリエ変換の影響も考えられ、周波数方向に平滑化することにより、幾分か軽減されるものと思われる。その 1 つの根拠として、Choi-Williams 分布の $\sigma=1.0$ では、ある特定の時間・周波数では負値も取り得るが、時間平均値は同図に示すように非負値となっている。

もう一つの周辺条件である周波数積分値と $|x(t)|^2$ との関係を示したのが、図 20 である。この図によると、Wigner 分布および Choi-

Williams 分布共に、時間窓を用いているにも関わらず、 $|x(t)|^2$ との一致度は極めて高いことが示されている。

6. 結論

本論文では、近年非定常信号解析法の一つとして注目を集めている Wigner 分布の特徴を取りまとめ、Charp 信号や津波水位変動の時間周波数解析を行い、その適用性を調べた。その結果、以下の事項が明らかとなった。

- (1) Wigner 分布は、周辺分布条件および全エネルギー条件を満たし、時間周波数の分解能も高いが、非負値の条件は満たさず、クロス項の影響が現れるという欠点を有する。そのため、Wigner 分布の適用に当たっては、これらの欠点を熟知した上で、それらを軽減することが必要である。
- (2) 離散的 Wigner 分布の具体的な計算法を示し、チャープ信号の時間周波数解析を行った。その結果、理論から予測されたように周波数が時間と共に変化する関係が見事に再現され、ピーク周波数もほぼ一致することが確認された。
- (3) クロス項を抑制する Cohen クラスを示し、その中でも比較的性能の高い Choi-Williams 分布および Zhang-Sato 分布の核関数を紹介した。さらに、Choi-Williams 分布の計算法を紹介した。
- (4) Wigner 分布および Choi-Williams 分布を、東北地方太平洋沖地震津波および福島県沖地震津波に適用し、非定常時間周波数解析を行った。その結果、須崎の津波水位変動は、津波到着後 100min 以内に須崎湾の固有周期である 34min 前後の変動が卓越していることが分った。
- (5) 小名浜における福島県沖地震津波では、陸棚セイシュ兼 0 次モードの陸棚波および 1 次モードの陸棚波が選択的に発達していることが、Choi-Williams 分布から明らかとなった。福島県沖における東北地方太平洋沖地震津波において

も、0次および1次モードの陸棚波の発生が示唆されたが、福島県沖のブイが沖合いに設置されているために、小名浜ほどエネルギーピークは明確ではなかった。

- (6) Wigner 分布および Choi-Williams 分布の時間平均値とスペクトル密度関数との比較を行ったところ、時間窓に hamming 窓を用いているにも拘わらず、Wigner 分布および $\sigma \geq 3$ の Choi-Williams 分布では、ほぼ類似した値を示していた。
- (7) Wigner 分布および Choi-Williams 分布の周波数積分値は、周辺分布条件から予測されたように、時間 t におけるエネルギーである $|x(t)|^2$ にほぼ一致していた。この関係は、 $\sigma \geq 1$ の条件ではほぼ成立していることが明らかとなった。

謝辞：

本研究において、東北地方太平洋沖地震津波波形のデータは、国土交通省港湾局の NOWPHAS のデータを用いたこと、および福島県沖地震津波のデータは、気象庁のデータを用いたことを付記し、感謝する。

参考文献

- 1) Cohen, L.: Time-Frequency Analysis, New York, Prentice-Hall, ISBN 978-0135945322, 1995.
- 2) Burg, J. P. : Maximum Entropy Spectral Analysis, presented at the 37th Annual Meeting Society Explor. Geophysics., Oklahoma City, Oct., 1967.
- 3) Mallat, S. G. : A theory for multiresolution signal decomposition : the wavelet representation, IEEE Trans. Pattern Anal Machine Intell 11, pp. 674-693, 1989.
- 4) 佐藤雅昭：ウェーブレット理論の数学的基礎，第 I 部，第 II 部，音響学会誌，第 47 巻，pp. 405-415, pp. 416-423, 1991.
- 5) Wigner, E. : Phys. Rev. Vol.40 , p.749, 1932.
- 6) Ville, J. : Theorie et Applications de la Notion de Signal Analytique, in Cables et Transmissions, Vol. 2a, pp. 61-74, 1948.
- 7) 山田道夫：時間周波数解析法と Wigner-Ville 分布，数理解析研究所講究録，第 1869 巻，pp. 15-25, 2013.
- 8) Claasen T. A. C. M. and Mechlenbrucker W. F. G.: Wigner Distribution-Tool for Time-Frequency Signal Analysis - PART 1, 2, 3, Philips J. Rec., Vol. 35, pp.217-250, pp.276-300, pp. 372-389, 1980.
- 9) Cohen, L.: Time-frequency distributions- A review, Proc. IEEE, Vol. 77, pp. 941-981, 1989.
- 10) Choi, H. and W. Williams : Improved Time-Frequency Representation of Multicomponent Signals Using Exponential Kernels, IEEE Transactions on Acoustics, Speech and Signal Processing, Vol. 37, pp. 862-871, 1989.
- 11) 日野幹雄：スペクトル解析，朝倉書店，p. 320, 1977.
- 12) 川上高史，安井伸行，北川 孟，堀畑 聡，石光俊介：Wigner 分布の逆変換による非定常信号の再構成，日本機械学会論文集 (C 編)，第 63 巻，607 号，pp. 341-347, 1997.
- 13) 本田利器・大濱吉礼：ウェーブレットを用いた Wigner 分布からの波形合成法，土木学会論文集，No.696/ I -28, pp.273-283, 2002.
- 14) 大塚 博，村山孝二，忠内 康：Wigner 分布において発生するクロス項の抑制法の検討，プラズマ・核融合学会誌，第 77 巻，第 11 号，pp. 1154-1162, 2001.
- 15) 吉川 昭：Wigner-Ville 分布：理論と応用，電子情報通信学会誌，第 73 巻，pp. 601-608, 1990.
- 16) 石光俊介・北川 孟：周波数領域適応フィルタを用いた Wigner 分布の干渉項除去，日本機械学会論文集 (C 編)，第 61 巻，584 号，pp. 226-231, 1995.

- 17) 鈴木 宏・小林史典・戸谷順信：ウィグナー分布とフーリエ変換のハイブリッドスペクトル解析法による表面波動現象の解析, 日本機械学会論文集 (C 編), 68 巻, 671 号, pp. 2037-2044, 2002.
- 18) 大塚 博, 永井孝佳, 築島隆繁：非定常プラズマ実験データのウィグナー分布による解析, 核融合研究, 第 60 巻, 第 8 号, pp. 217-228, 1988.
- 19) Cohen, L. : Generalized phase- space distribution functions, J. Math. Phys. Vol. 7, pp. 781-786, 1966.
- 20) Choi, H. and W. Williams: Improved Time-Frequency Representation of Multicomponent Signals Using Exponential Kernels, IEEE Transactions on Acoustics, Speech and Signal Processing, Vol. 37, pp. 862-871, 1989.
- 21) Zhang, B. and S. Sato : A time-frequency distribution of Cohen's class with a compound kernel and its application to speech signal processing. IEEE Trans Signal Proc. Vol. 42, pp. 54-64, 1994.
- 22) Cardoso, J. G. Ruano and P. Fish : Nonstationary Broadening Reduction in Pulsed Doppler Spectrum Measurements Using Time-Frequency Estimations, IEEE Transactions on Biomedical Engineering, Vol. 43, pp. 1176-1186, 1996.
- 23) Fujii Y., K. Satake, S. Sakai, M. Shinohara, T. Kanazawa, (2011) : Tsunami source of the 2011 off the Pacific coast of Tohoku Earthquake, Earth Planets Space, Vol.63, pp.815-820.
- 24) 梅田康弘・板場智史・細善信：高知県須崎湾における潮位観測－1946年南海道地震前に海水位変化の検証のため－, 地質調査所研究報告, 第 67 巻, 第 1 号, pp. 11-25, 2016.
- 25) 今井健太郎・佐竹健治・古村孝志：南海トラフで発生する地震による四国南部沿岸での津波継続特性, 土木学会論文集 B2 (海岸工学), Vol.B2-65, No.1, pp. 281-285, 2009.
- 26) Ursell. F. : Edge waves on a sloping beach, Proc. Roy. Soc., A, Vol. 214, pp. 79-98, 1952.
- 27) Eckart, C. : surface waves on water of variable depth, Wave Rept. No.100, Scripps. Inst. Oceanogr., Univ. Calif., 99p, 1951.
- 28) 泉宮尊司・白晃栄・石橋邦彦：2008年2月24日新潟・富山高波被害の気象・海象からの要因分析, 海岸工学論文集, 第 55 巻, 181-185, 2008.
- 29) 高山知司, 平石哲也：須崎湾における津波に関する水理模型実験, 港湾技研資料, No. 549, pp. 1-131, 1986.
- 30) Anawat Suppasri, 山下 啓, Panon Latcharote 他：2016年福島県沖地震津波の数値解析と現地調査, 土木学会論文集 B2 (海岸工学), Vol. 73, No. 2, pp. I 1597-I 1602, 2017.