

Green-Naghdi 方程式に基づく津波伝播計算モデルと 種々の理論モデルの比較 (第 2 報)

山下 啓*・柿沼 太郎**・今村 文彦*

1. 序 論

非線形な津波が示す、無視できない性質の一つに、ソリトン分裂がある。ソリトン分裂により、波高が急激に増大した津波は、沿岸構造物や底質に多大な影響を及ぼす可能性がある。こうした、複雑な挙動を示す津波を予測・評価するためには、波の非線形性や分散性を考慮する必要がある。これまで、Boussinesq 型方程式等を基礎方程式とする様々な数値モデルが開発されてきた (例えば、岩瀬ら, 2001)。

ところで、数値モデルの精度は、基礎方程式に採用する波動方程式と、数値スキームの、両者の精度に委ねられている。このうち、波動方程式の精度に関しては、線形分散関係式や、孤立波解のような定常波解に基づいて、理論的観点から調べることができるであろう。しかしながら、KdV 方程式や Green・Naghdi (1976) の方程式のように、孤立波の厳密解が得られている方程式系は限られている。そのため、岩瀬ら (2002) は、種々の Boussinesq 型方程式に対する孤立波の第 1 次近似解を解析的に求め、それぞれの方程式の理論的精度を調べた。また、近年は、孤立波解を得るための Newton-Raphson 法に基づく数値解法 (山下・柿沼, 2013; Zhao ら, 2014) や、モード展開法を用いた解析的な手法 (Akbar・Ali, 2014) が提案されている。ただし、Peregrine (1967), Madsen・Sørensen (1992) 及び Nwogu (1993) による弱非線形理論の Boussinesq 型方程式でさえ、理論的精度に対する理解は、十分であると言

えない。

他方、数値スキームの精度に関しては、線形理論の方程式を基礎方程式とする数値モデルに対する検証が進められているものの (今村・後藤, 1986; 嶋原・藤間, 2007), 非線形性が無視できない波動場に対する数値スキームの適用性に関しては、不明な点が多い。これは、例えば、孤立波が安定して伝播するかどうかといった検証を行なうためには、入射させる孤立波の厳密解を得る必要があるからである。

また、沿岸防災では、海岸構造物における打上高等、波の非線形な挙動を踏まえたハザード評価が要求され、種々の方程式を基礎方程式とする様々な数値モデルが実務に供されている。しかしながら、上述したように、各モデルの示す非線形波の伝播特性が明らかになっておらず、各モデルで得られた数値解析結果の類似点や相違点を把握しておかなければ、ハザードを見誤る可能性がある。

そこで、本研究では、Peregrine (1967) による方程式 (以下では、P 方程式と呼ぶ) 及び Madsen・Sørensen (1992) の方程式 (以下、MS 方程式) の孤立波の数値解を求める。そのために、孤立波の第 1 次近似解 (岩瀬ら, 2002) を入射波とし、前報 (山下ら, 2016a) で開発した、それぞれの方程式を基礎方程式とする数値モデルを適用して伝播解析を行なう。その際に、定常進行波と認められるようになるまで、波を伝播させる。こうして、P 方程式及び MS 方程式の孤立波の数値解が得られる。これらの数値解を KdV 方程式の孤立波の理論解や、強非線形理論である Green・Naghdi 方程式 (以下、GN 方程式) の孤立波の厳密解 (Bonneton ら, 2011), そして、強非線形強分散方程式 (柿沼, 2001)

*東北大学災害科学国際研究所

**鹿児島大学学術研究院理工学域

の孤立波の数値解 (Yamashita・Kakinuma, 2015; 山下ら, 2016b) と比較して, 種々の孤立波解の精度及び特性を調べる。

更に, 鉛直壁における孤立波の打上高を対象として, 種々の数値モデルで再現される孤立波の伝播特性や問題点の検討も行なう。

2. 数値解析における孤立波解の定常性

P 方程式及び MS 方程式の孤立波の第 1 次近似解 (岩瀬ら, 2002) を入射波として与え, 各方程式を基礎方程式とする数値モデルを用いて伝播解析を行なう。ここで, 数値モデルは, 前報 (山下ら, 2016a) と同様, Leap-Frog 陰解法 (佐山ら, 1987) を適用したモデルとするが, ただし, 誤差修正項は導入しない。そして, 数値解析における, これらの孤立波の第 1 次近似解の定常性を調べる。更に, 定常進行波と認められるようになるまで, 波を伝播させ, P 方程式及び MS 方程式の孤立波の数値解を得る。

本研究では, 静水深が $h = 1.0 \text{ m}$ で一様な水域を計算対象領域として, 孤立波を x 軸の正の方向に伝播させる。なお, $t = 0 \text{ s}$ における孤立波のピークの初期位置は, $x = 50 \text{ m}$ とする。計算格子間隔及び計算時間間隔は, それぞれ, $\Delta x = 0.05 \text{ m}$ 及び $\Delta t = 0.0005 \text{ s}$ とし, この解像度を解像度 A と呼ぶ。

図-1 (a) 及び (b) は, それぞれ, MS 方程式及び P 方程式を基礎方程式とした場合の, $t = 100 \text{ s}$ における水面形を示す。ここで, 波高 $a_0 = 0.5 \text{ m}$ の孤立波解を初期条件として与えており, η は, 水面変動である。

また, 図-1 (c) は, 同条件に対する GN 方程式の孤立波の厳密解を与えて, GN モデルを用いて伝播させた結果である。ここで, GN モデルは, GN 方程式を基礎方程式とする, 前報 (山下ら, 2016a) で用いた数値モデルであり, 誤差修正項を導入している。図-1 (c) では, 分裂波の発生や波高減衰が殆ど認められず, 孤立波解の定常性が保たれている。この原因として, GN 方程式の厳密解を与えたこと, また, 誤差修正項を導入して,

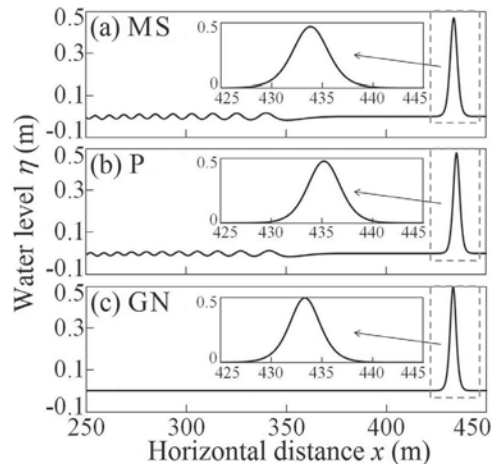
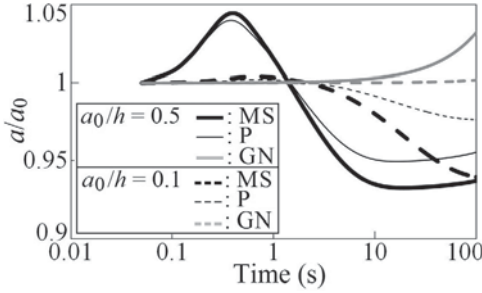


図-1 水平床上を 100 s 間伝播した後の孤立波の水面形の計算結果 ($h = 1.0 \text{ m}$, $a_0 = 0.5 \text{ m}$)

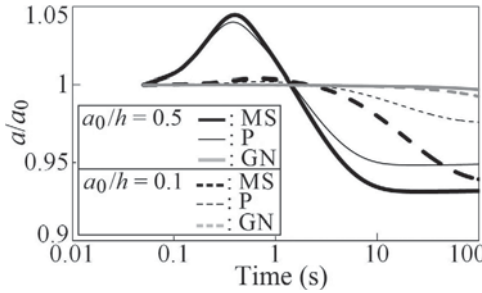
非線形波への適用性が良好な Leap-Frog 陰解法 (佐山ら, 1987) を適用したことで, 解像度が十分であったことが挙げられる。

他方, 図-1 (a) 及び (b) では, 波の分裂と波高減衰の両者が生じている。これには, 第 1 次近似解の精度と, 数値スキーム及び解像度の精度とが影響していると考えられる。そこで, P モデル及び MS モデルを用いた, より解像度の高い計算を行ない, 孤立波解と数値スキームの精度を調べる。ここで, 解像度を $\Delta x = 0.01 \text{ m}$ 及び $\Delta t = 0.00005 \text{ s}$ とし, この解像度を解像度 B と呼ぶ。

図-2 (a) 及び (b) に, 波高 a と初期波高 a_0 の比 a/a_0 の時間変化を示す。 $a_0 = 0.1 \text{ m}$ の場合, 第 1 次近似解を与えた MS モデル及び P モデルの両者の結果は, 図-2 (a) と (b) とで類似している。すなわち, $t \sim 1 \text{ s}$ まで, 波高が僅かに増加し, その後, 分裂波の発生に伴い, 波高が次第に減少する。そして, $t = 100 \text{ s}$ の波高変化は, 比較的小さくなっている。また, GN モデルの結果は, 誤差修正項の有無に関わらず, $t \sim 1 \text{ s}$ まで, 波高の増減が殆どなく, 孤立波解の精度が高い。ただし, その後, 誤差修正項を導入していないモデルでは, 漸増し, 導入したモデルでは, 漸減するといった, 僅かな差異が認めら



(a) Pモデル: 解像度 A, 誤差修正項なし;
MSモデル: 解像度 A, 誤差修正項なし;
GNモデル: 解像度 A, 誤差修正項なし



(b) Pモデル: 解像度 B, 誤差修正項なし;
MSモデル: 解像度 B, 誤差修正項なし;
GNモデル: 解像度 A, 誤差修正項あり

図-2 波高 a と初期波高 a_0 の比 a/a_0 の時間変化

れる。このうち、前者の漸増は、負の数値粘性の影響であり、計算の不安定に繋がる。こうした負の数値粘性の影響は、前報(山下ら, 2016a)で述べた通り、誤差修正項の導入により低減される。

他方、 $a_0 = 0.5$ m の場合、GN モデルの結果は、前述の $a_0 = 0.1$ m の場合と比較して、図-2(a)より、負の数値粘性の影響が大きく現れている。これは、孤立波の波形を表現する際に、波高が大きい場合の解像度が低下するためである。ただし、図-2(b)より、誤差修正項は、効果的に作用している。また、第1次近似解を与えた MS モデル及び P モデルの結果は、 $t \sim 0.5$ s まで、波高が増加し、その後、分裂波の発生に伴い波高が次第に減少する。そして、 $t \sim 10$ s 以降、解像度 A の図-2(a)では、波高が漸増するが、解像度 B の図-2(b)では、ほぼ定常状態となっている。前者の漸増は、

負の数値粘性によるものであり、これは、誤差修正項を導入せずに Leap-Frog 陰解法を適用した MS モデル、P モデル及び GN モデルに共通する問題である。従って、これらのモデルを用いて、波の長時間伝播の計算を行なう場合には、計算の発散や、波高の過大評価に注意する必要がある。

3. 種々の孤立波解の精度及び特性

図-1(a)及び(b)より、MS 方程式及び P 方程式の1次近似解が、各方程式の孤立波解としてなじむまでの伝播過程において、分裂波が生じたことがわかる。そして、図-1に示した拡大図より、定常状態に近付いた先行波の波形は、殆ど前後対称の孤立波状である。そこで、これらの先行波をそれぞれ MS 方程式及び P 方程式の孤立波の数値解とみなす。そして、次の7種類の孤立波解を比較し、精度及び特性を調べる。

- ① P 方程式の第1次近似解
- ② MS 方程式の第1次近似解
- ③ P 方程式の数値解
- ④ MS 方程式の数値解
- ⑤ GN 方程式の厳密解
- ⑥ KdV 方程式の厳密解
- ⑦ 強非線形強分散方程式 ($N=5$) の高精度数値解

このうち、①及び②は、岩瀬ら(2002)による、それぞれ、P 方程式及び MS 方程式の孤立波の第1次近似解である。

一方、③及び④は、上述した、それぞれ、P 方程式及び MS 方程式の、孤立波の数値解である。

また、⑦は、柿沼(2001)の強非線形強分散方程式に対して、山下・柿沼(2013)の手法により得られた孤立波の数値解である。本方程式では、速度ポテンシャルが鉛直軸 z のべき級数として表現されており、 N は、その項数である。⑦の数値解は、 $N=5$ の場合、孤立波に対する高精度解となることが確認されている(Yamashita・Kakinuma, 2015; 山下ら, 2016b)。

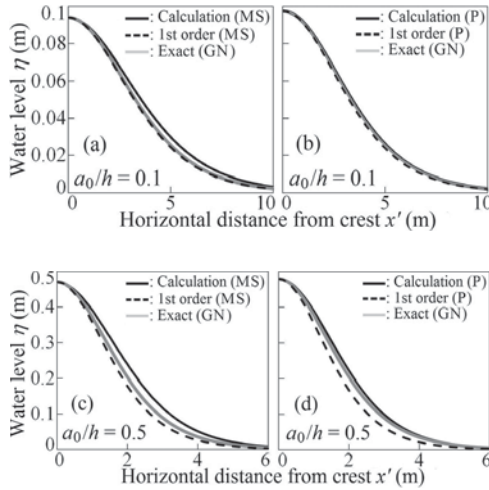


図-3 ①～⑤の孤立波の波形の比較

ところで、前報で、①、②、⑤及び⑥と、⑦の、孤立波の波形を比較している。その結果、波高水深比が小さい場合 ($a_0/h \sim 0.1$)、①、②、⑤及び⑥の波形の精度が高いことがわかった。一方、波高水深比が大きい場合 ($a_0/h \sim 0.5$)、弱非線形理論の第1次近似解である①及び②の波形の精度は、良好であったが、強非線形理論の厳密解である⑤の波形は幅広であり、⑥の波形は急峻であった。すなわち、①及び②の波形は、⑤及び⑥よりも高精度であった。以上を踏まえて、図-3に示す①～⑤の孤立波の波形の精度を論じる。

$a_0/h = 0.1$ の場合、図-3 (b) より、P 方程式の数値解 (③) の波形も、高精度であると言える。これに対して、 $a_0/h = 0.5$ の場合、図-3 (d) より、P 方程式の数値解 (③) の波形は、GN 方程式の厳密解 (⑤) よりも、頂点付近で丸みを帯びることがわかる。特に、P 方程式の数値解 (③) が、同一の方程式の第1次近似解 (①) よりも、丸みを帯びた波形を示し、両者の波形の差異が大きくなることに注意する必要がある。

一方、図-3 (a) より、MS 方程式の数値解 (④) の波形は、波高水深比が比較的小さい場合においてさえ丸みを帯びており、図-3 (c) より、波高水深比が大きい場合、その傾向が顕著である。

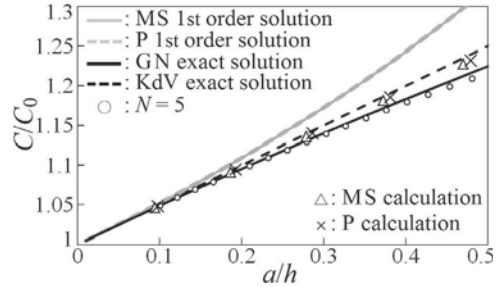


図-4 ①～⑦の孤立波の相対波速 C/C_0

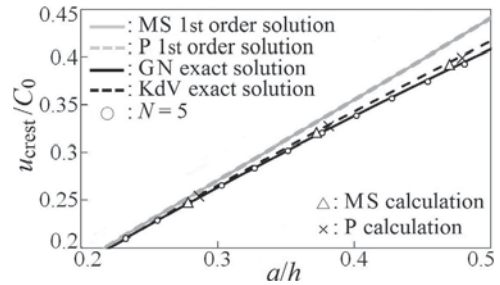


図-5 ①～⑦の孤立波の峰の位置における水平方向流速 u_{crest} の相対値 u_{crest}/C_0

以上より、孤立波の波形の理論的精度は、前述した第1次近似解に基づく結果と異なり、GN 方程式が最も高く、P 方程式、MS 方程式の順に低くなる。そして、精度が低い波形ほど、より丸みを帯びる。波形の丸みは、非線形性が相対的に小さいことを表わしており、弱非線形を仮定した P 方程式及び MS 方程式が示す特性である。

次に、①～⑦の孤立波の相対位相速度 C/C_0 を図-4に示す。ここで、 C_0 は、線形浅水波の位相速度である。また、P 方程式及び MS 方程式の孤立波の数値解 (③及び④) の位相速度は、定常進行波に対する連続方程式を水平方向に積分して得られる次に、前章で得た先行波の峰位置における水位 η_{crest} と、流量 Q_{crest} 、または、流速 u_{crest} を代入して求めた。

$$-C\eta + Q = 0 \quad \text{or} \quad -C\eta + (\eta + h)u = 0 \quad (1)$$

図-4 より、P 方程式及び MS 方程式の第1次近似解 (①及び②) の位相速度は、それぞれの数値解の位相速度 (③及び④) より大

大きく, KdV 方程式の厳密解 (⑥) より精度が低い。そして, これらの数値解の位相速度 (③及び④) の精度は, KdV 方程式の厳密解 (⑥) より高く, GN 方程式の厳密解 (⑤) より低い。以上より, 孤立波の位相速度の理論的精度は, GN 方程式が最も高く, MS 方程式, P 方程式の順に低くなる。

また, 図-5 は, 孤立波の峰位置における水平方向流速 u_{crest} の相対値 u_{crest}/C_0 を示している。図-5 においても, 図-4 と同様の傾向が見られる。

このように, 孤立波の波形, 位相速度及び流速に基づき, 理論的観点より孤立波解の精度を判断すると, 浅海域のように非線形性が大きな波動場に対しては, GN 方程式の精度が高いと言える。ただし, 今後, より大きな波高水深比の場合に対する検討が必要である。

4. 鉛直壁に衝突する孤立波の打上高

鉛直壁における孤立波の打上高を対象として, 種々の数値モデルで再現される孤立波の伝播特性や問題点を検討する。適用する数値モデルは, 前述の P モデル, MS モデル及び GN モデルに加えて, 強非線形強分散方程式 (柿沼, 2001) を基礎方程式とする数値モデル (以下, 強非線形強分散モデル) とする。ここで, 強非線形強分散モデルは, 2 層流体における内部波の伝播を対象として, 陰的な差分法を適用した Nakayama・Kakinuma (2010) のプログラムの一部を書き換えた, 表面波の伝播を対象とした数値モデルである。強非線形強分散モデルは, 理論的精度と伝播解析の精度の両者が高いことが確かめられている (Nakayama・Kakinuma, 2010; 山下・柿沼, 2013)。ここでは, 速度ポテンシャルの展開項数を $N = 3$ とする。

静水深が $h = 1.0 \text{ m}$ である水域を計算対象領域とする。P モデル, MS モデル及び GN モデルの解像度を解像度 A とし, $\Delta x = 0.05 \text{ m}$ 及び $\Delta t = 0.0005 \text{ s}$ とする。また, 強非線形強分散モデルの解像度を $\Delta x = 0.1 \text{ m}$ 及び $\Delta t = 0.0001 \text{ s}$ とする。そして, 3. の①, ②, ⑤

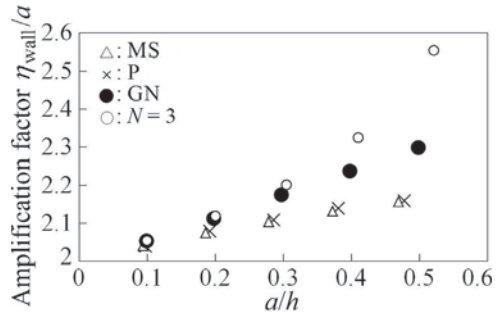


図-6 鉛直壁の位置における孤立波の波高増幅率 η_{wall}/a

及び⑦の孤立波解を入射波として与える。 $t = 0 \text{ s}$ における孤立波のピークの初期位置を $x = 50 \text{ m}$ とし, $x = 350 \text{ m}$ に位置する鉛直壁における波高増幅率を調べる。なお, 波高増幅率は, 田中・松田 (1996) によると, $0 \leq a/h \leq 0.5$ では, 2.5 以下であり, $a/h = 0.7$ の大振幅波では, 3.3 に達する。

種々の数値モデルによる波高増幅率 η_{wall}/a を図-6 に示す。ここで, 2. で確認された波高変化の影響を除外した。すなわち, 波高増幅率の基準値 a は, 初期波高 a_0 でなく, 鉛直壁がない領域を時刻 t_1 まで伝播させた後の最高水位としている。 t_1 は, 鉛直壁の位置において, 水位が最高水位 η_{wall} に到達した時刻である。

図-6 より, 弱非線形モデルである MS モデル及び P モデルの波高増幅率は, 過小評価となっていることがわかる。特に, 非線形性が大きい場合の誤差が大きく, $a/h = 0.5$ の場合, 弱非線形モデルの波高増幅率は, 2.5 に届かず, 2.2 倍程度である。また, 僅かではあるが, P モデルの方が MS モデルより波高増幅率大きい。これは, MS 方程式よりも P 方程式の方が, 孤立波解の非線形性が僅かながら強いという, 3. で述べた特性と整合する。弱非線形モデルを適用した数値解析では, こうした誤差を踏まえてハザード評価を行なう必要がある。

他方, 強非線形モデルである GN モデルの波高増幅率は, 過小評価であるものの, MS モデル及び P モデルより良好であり, $a/h =$

0.5 の場合、約 2.3 である。

以上より、非線形性が大きな重複波性の波動場では、各モデルの精度は、GN モデルが最も高く、P モデルと MS モデルが同程度である。

5. 結 論

Peregrine 方程式及び Madsen・Sørensen 方程式の、第 1 次近似孤立波解の定常性を調べた。また、Peregrine 方程式及び Madsen・Sørensen 方程式の、孤立波の数値解を求めた。更に、Peregrine 方程式、Madsen・Sørensen 方程式、Green・Naghdi 方程式及び強非線形強分散方程式を基礎方程式とする数値モデルを適用して、鉛直壁における孤立波の打上高を調べた。そして、これらの理論や数値モデルの適用性や問題点に関して、次のような結果が得られた。

- ・ Leap-Frog 陰解法を適用した Peregrine モデル、Madsen・Sørensen モデル及び Green・Naghdi モデルの解は、負の数値粘性の影響を受ける。このため、長時間の伝播解析では、計算の発散や、波高の過大評価に注意する必要がある。この解決策として、高解像度化と、誤差修正項の導入が有効である。
- ・ 孤立波の波形の理論的精度は、Green・Naghdi 方程式、Peregrine 方程式、Madsen・Sørensen 方程式の順に低くなり、精度が低い波形ほど丸みを帯びる。
- ・ 孤立波の波速及び水平方向流速の理論的精度は、Green・Naghdi 方程式、Madsen・Sørensen 方程式、Peregrine 方程式、KdV 方程式の順に低くなり、精度が低いほど、波速と流速が過大評価となる。
- ・ 鉛直壁における孤立波の波高増幅率は、 $a/h = 0.5$ の場合、弱非線形モデルである Peregrine モデル及び Madsen・Sørensen モデルでは、2.2 未満であり、強非線形強分散モデルの 2.5 を大きく下回った。他方、強非線形モデルである Green・Naghdi モデルでは、2.3 と過小であるものの、弱非線

形モデルより精度が高かった。

以上より、ソリトン分裂が生じるような、非線形性が大きな波動場では、各モデルの精度は、Green・Naghdi モデルが最も高く、Peregrine モデルと Madsen・Sørensen モデルが同程度であると結論される。

謝辞：東北大学災害科学国際研究所地震津波リスク評価（東京海上）寄附研究部門において、東京海上日動火災保険株式会社の支援を受けるとともに、東北大学災害科学国際研究所リソースを活用した共同研究「津波統合モデル解析の高度化」（代表：関西大学 高橋智幸教授）による研究助成を受けました。ここに謝意を表します。

参考文献

- 1) 今村文彦・後藤智明：差分法による津波数値計算の打ち切り誤差，土木学会論文集，375，II-6，241-250，1986.
- 2) 岩瀬浩之・深澤雅人・後藤智明：ソリトン分裂波の碎波変形に関する水理実験と数値計算，海岸工学論文集，48，306-310，2001.
- 3) 岩瀬浩之・見上敏文・後藤智明・藤間功司：津波の伝播計算を対象とした非線形分散長波式の比較，土木学会論文集，7058，II-59，129-138，2002.
- 4) 柿沼太郎：透水性海浜における内部波の挙動の数値計算，海岸工学論文集，48，146-150，2001.
- 5) 佐山順二・今村文彦・後藤智明・首藤伸夫：外海域における津波の高精度計算法に関する検討，第 34 回海岸工学講演会論文集，177-181，1987.
- 6) 鳴原良典・藤間功司：津波数値解析における分散波理論モデルの適用性と新しい値計算法の提案，土木学会論文集 B，63，1，51-66，2007.
- 7) 田中光宏・松田博文：CG アニメーションによる孤立波の Mach 反射，京都大学数理解析研究所講究録，949，229-237，

- 1996.
- 8) 山下 啓・柿沼太郎：非線形波動方程式系に基づく表面孤立波及び内部孤立波の数値解，土木学会論文集 B2 (海岸工学)，69, 2, I_006-I_010, 2013.
- 9) 山下 啓・柿沼太郎・今村文彦：Green-Naghdi 方程式に基づく津波伝播計算モデルと種々の理論モデルの比較，津波工学研究報告，33, 27-38, 2016a.
- 10) 山下 啓・柿沼太郎・中山恵介：表面孤立波及び内部孤立波の特性，土木学会論文集 B2 (海岸工学)，72, 1, 27-41, 2016b.
- 11) Akbar, M.A. and Ali, N.H.M.: Solitary wave solutions of the fourth order Boussinesq equation through the $\exp(-\Phi(\eta))$ -expansion method, Springer Plus, DOI: 10.1186/2193-1801-3-344, 6 pages, 2014.
- 12) Bonneton, P., Barthelemy, E., Chazel, E., Cienfuegos, R., Lannes, D., Marche, F. and Tissier, M.: Recent advances in Serre-Green Naghdi modelling for wave transformation, breaking and runup processes, European Journal of Mechanics B/Fluids, 30, 589-597, 2011.
- 13) Green, A. E. and Naghdi, P. M.: A derivation of equations for wave propagation in water of variable depth, Journal of Fluid Mechanics, 78, 237-246, 1976.
- 14) Madsen, P. A. and Sørensen, O. R.: A new form of the Boussinesq equations with improved linear dispersion characteristics, Part 2, A slowly-varying bathymetry, Coastal Engineering, 18, 183-204, 1992.
- 15) Nakayama, K. and Kakinuma, T.: Internal waves in a two-layer system using funny nonlinear internal-wave fully equations, International Journal for Numerical Methods in Fluids, 62, 574-590, 2010.
- 16) Nwogu, O.: Alternative form of Boussinesq equations for nearshore wave propagation, Journal of Waterway, Port, Coastal, and Ocean Engineering, 119, 6, 618-638, 1993.
- 17) Peregrine, D. H.: Long waves on a beach, Journal of Fluid Mechanics, 27, 815-827, 1967.
- 18) Yamashita, K. and Kakinuma, T.: Properties of surface and internal solitary waves, Coastal Engineering 2014, waves. 45, 15 pages, 2015.
- 19) Zhao, B.B., Ertekin, R.C., Duan, W.Y. and Hayatdavoodi, M.: On the steady solitary-wave solution of the Green-Naghdi equations of different levels, Wave Motion, 51, 1382-1395, 2014.