

## Green-Naghdi 方程式に基づく津波伝播計算モデルと 種々の理論モデルの比較

山下 啓\*・柿沼 太郎\*\*・今村 文彦\*

### 1. 序 論

津波が沿岸域に來襲すると、津波の伝播の様子は複雑性を大きく増す。例えば、急激な波高増加やソリトン分裂が生じる。これらは、水の波が有する非線形性と分散性に由来する。沿岸域において、波高が増大した津波の、海岸構造物に作用する波圧は、構造物の安定性を損ね、波高増幅による底面流速の増加は、底質をより容易に移動させるであろう。強い流れにより構造物の周辺が洗掘されると、構造物の倒壊が助長され、また、大量に巻き上げられた土砂は、港湾や陸域に堆積し、復旧・復興の妨げとなる。従って、沿岸域の津波リスクを精緻に評価するためには、津波の非線形性と分散性の両者を考慮することが重要である。

ところで、近年、Peregrine 方程式 (Peregrine, 1967) などの Boussinesq 型方程式を基礎方程式とする様々な数値モデル (Boussinesq 型モデルと呼ぶ) が開発されてきた (例えば、佐藤, 1995; 岩瀬ら, 2001; 松山ら, 2006; 鳴原・藤間, 2007; 村鳴ら, 2012, Baba ら, 2014)。Boussinesq 型方程式は、弱い非線形性と弱い分散性を仮定して、摂動法によって得られる弱非線形波動方程式である。例えば、Peregrine 方程式は、波高・水深比  $a/h$  と水深・波長比  $h/\lambda$  を摂動核として、 $O(a/h) \ll 1$  及び  $O(a/h) = O((h/\lambda)^2)$  の波を対象とした波動方程式である。すなわち、Boussinesq 型方程式は、本来、大振幅波や短波長の波を解析することには適さないのである。

こうした Boussinesq 型モデルが抱える問

題を解決するために、岩瀬ら (2001) 及び松山ら (2006) は、Boussinesq 型モデルに負の運動量拡散項を導入し、ソリトン分裂後から砕波に至るまでの間に生じる、顕著な波高増幅を再現することに成功した。しかしながら、人為的に増幅されたエネルギーによって、顕著な波高増幅は再現できるものの、構造物や底質に作用する、津波の流体力や流れ場の再現精度への影響は明らかではない。

他方、灘岡・中川 (1993)、後野 (1994)、磯部 (1994) 及び柿沼 (2001) は、Boussinesq 型方程式といった摂動法では再現することが難しい、強非線形及び強分散的な波の挙動を数学的に記述するために、級数展開法を適用した強非線形波動方程式を提案した。これらの強非線形理論では、流速や動圧、または、速度ポテンシャルの鉛直分布が重み付き級数に展開されている (本論文では、これらを級数展開法と呼ぶことにする)。このため、これらの鉛直分布の自由度を上げることにより、波動場の鉛直方向への依存性をより適切に考慮できるように理論が構築されている。例えば、柿沼 (2001) の方程式系を対象として、線形分散関係に関しては、Nakayama・Kakinuma (2010) が、そして、孤立波に関しては、山下・柿沼 (2013) 及び Yamashita・Kakinuma (2015) が、速度ポテンシャルの展開項数の増加に応じて、理論モデルの精度が向上することを明らかにしている。しかしながら、水面変動と各級数項の重み係数を未知数とする級数展開法では、展開項数の増加に伴い未知数も増加し、計算効率が低下するという問題がある。

ところで、Green・Naghdi (1976) は、長波を対象として、波の非線形性に対して仮定を課さずに波動方程式 (Green-Naghdi 方

\*東北大学災害科学国際研究所

\*\*鹿児島大学学術研究院理工学域

程と呼ぶ)を導出している。このため、Green-Naghdi 方程式は、Boussinesq 型方程式よりも大振幅波に対する適用性が高いと考えられる。また、Green-Naghdi 方程式の未知数は、Boussinesq 型方程式と同じであるため(未知数は、水面変動  $\eta$  と鉛直平均水平方向流速  $u$  である。)、級数展開法よりも計算効率が高いという利点を有する。更に、数値モデルの開発においては、既往の Boussinesq 型モデルで開発された数値解法を準用することが可能である。

以上のように、Green-Naghdi 方程式は、Boussinesq 型方程式と級数展開法との中間的な位置付けにあり、計算精度、または、計算効率において従来モデルよりも優位性を有している。しかしながら、Green-Naghdi 方程式を津波解析のために利用した先行研究は、例えば、都司 (1998) や韓・都司 (2002) があつたものの、現状では少ないようである。

そこで、本研究では、Green-Naghdi 方程式を基礎方程式系とした、高精度・高効率な津波解析モデルを開発することを目的とする。まず、Green-Naghdi 方程式の孤立波解を種々の理論解や高精度数値解 (Longuet-Higgins・Fenton, 1974; 山下・柿沼, 2013; Yamashita・Kakinuma, 2015) と比較し、孤立波解の精度と特性を把握する。孤立波の特性はソリトン分裂によって生じる分裂波の挙動を示唆するため、各理論による孤立波解の特性を把握することは、各理論モデルによって再現される分裂波の挙動を把握することに役立つ。次に、Green-Naghdi 方程式を高精度に解くための、1次元伝播計算モデルを開発する。最後に、Green-Naghdi 方程式に基づく本数値モデルや種々の理論モデルを適用して、ソリトン分裂を対象とした既往の水理実験 (松山ら, 2006) の再現計算を行なう。そして、大振幅津波に対する本数値モデルの適用性を調べる。

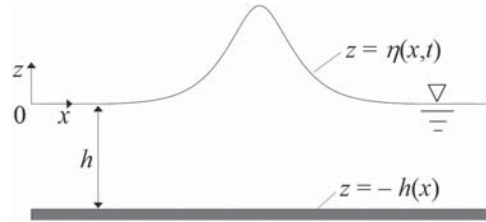


図-1 水面波の諸量の定義

## 2. Green-Naghdi 方程式の概要

### 2.1 基礎方程式系

図-1に示す、完全流体の鉛直断面内における運動を対象とする。鉛直軸  $z$  は静水面を原点として、上向きが正である。水面変動及び底面位置(固定床)は、それぞれ、 $z = \eta(x, t)$  及び  $z = -h(x)$  である。

Green-Naghdi 方程式の導出過程において課された仮定は、流速の鉛直分布形である。長波を対象とする Green・Naghdi (1976) の理論では、流速の鉛直分布として、一様分布である水平方向流速  $u$  と、線形に分布する鉛直方向流速  $w$  を仮定した。すなわち、 $u$  及び  $w$  は、それぞれ、次式で定義される。

$$u = u(x, t) \quad (1)$$

$$w = w_0(x, t) + z \cdot w_1(x, t) \quad (2)$$

式 (2) の導入により、波の動圧成分が考慮され、波の分散性を表現できるのである。また、水面及び底面における非線形な運動学的境界条件に対しては、何ら仮定を課していないため、強非線形理論である。

式 (1) 及び式 (2) を、水面及び底面における運動学的境界条件式に代入すると、式 (2) における  $w_0$  及び  $w_1$  として、次式を得る。(例えば、Ertekin ら, 1986)

$$w_0 = -u \frac{\partial h}{\partial x} + \frac{h}{\eta + h} \left\{ \frac{\partial \eta}{\partial t} + u \frac{\partial (\eta + h)}{\partial x} \right\} \quad (3)$$

$$w_1 = \frac{1}{\eta + h} \left\{ \frac{\partial \eta}{\partial t} + u \frac{\partial (\eta + h)}{\partial x} \right\} \quad (4)$$

従って、鉛直方向流速  $w$  は次式で表わされる。

$$w = -u \frac{\partial h}{\partial x} + (z+h) \frac{\partial u}{\partial x} \quad (5)$$

ここで、次式の連続方程式を考慮している。

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(Du) = 0 \quad (6)$$

ここで、 $D = \eta + h$  は全水深である。

水面における圧力をゼロとすると、Green-Naghdi 方程式の運動方程式として、次式を得る (例えば、Bonneton ら, 2011)。

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + g \frac{\partial \eta}{\partial x} = \frac{1}{3D} \frac{\partial G_0}{\partial x} + G_1 + G_2 \quad (7)$$

$$G_0 = D^3 \left\{ \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right) + u \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 \right\} \quad (8)$$

$$G_1 = \frac{1}{2D} \left\{ \frac{\partial}{\partial x} \left[ \eta^2 \frac{\partial h}{\partial x} \left( \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} - u^2 \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} \right) \right] \right\} \quad (9)$$

$$G_2 = -\frac{\partial h}{\partial x} \left\{ \frac{D}{2} \left[ \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right) + u \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 \right] + \frac{\partial h}{\partial x} \left( \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} - u^2 \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} \right) \right\} \quad (10)$$

なお、本研究では、岩瀬 (2005) に倣い、底面勾配の影響が小さい場合を対象とする。すなわち、式 (7) において、式 (9) 及び式 (10) を無視した次式を採用する。

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + g \frac{\partial \eta}{\partial x} = \frac{1}{3D} \frac{\partial G_0}{\partial x} \quad (11)$$

## 2.2 無次元量に関する Green-Naghdi 方程式

無次元量に関する Green-Naghdi 方程式を導く。そのために、代表値を用いて諸量を次

式のように無次元化する。

$$\begin{aligned} x^* &= \frac{x}{\lambda}, \quad t^* = \frac{\sqrt{\varepsilon} u_0}{\lambda} t, \quad \frac{\partial}{\partial x^*} = \lambda \frac{\partial}{\partial x}, \\ \frac{\partial}{\partial t^*} &= \frac{\lambda}{\sqrt{g h_0}} \frac{\partial}{\partial t}, \quad \eta^* = \frac{\eta}{a}, \quad h^* = \frac{h}{h_0}, \\ u^* &= \frac{u}{\varepsilon \sqrt{g h_0}}, \quad D^* = h^* + \varepsilon \eta^* = \frac{D}{h_0}, \\ \varepsilon &= \frac{a}{h_0}, \quad \sigma = \frac{h_0}{\lambda} \end{aligned} \quad (12)$$

ここで、 $h_0$ 、 $a$  及び  $\lambda$  は、それぞれ、代表静水深、代表波高及び代表波長であり、 $\varepsilon$  及び  $\sigma$  は、それぞれ、波高・水深比及び水深・波長比の代表値である。また、「\*」が無次元量であることを示しており、「\*」付きの無次元量のオーダーは 1 である。

式 (12) を、式 (6) 及び式 (11) に代入すると、次式に示す、無次元量に関する Green-Naghdi 方程式を得る。

$$\frac{\partial \eta^*}{\partial t^*} + \frac{\partial}{\partial x^*} (D^* u^*) = 0 \quad (13)$$

$$\frac{\partial u^*}{\partial t^*} + \varepsilon u^* \frac{\partial u^*}{\partial x^*} + \frac{\partial \eta^*}{\partial x^*} = \sigma^2 \frac{1}{3D^*} \frac{\partial G_0^*}{\partial x^*} \quad (14)$$

$$G_0^* = D^{*3} \left\{ \frac{\partial}{\partial t^*} \left( \frac{\partial u^*}{\partial x^*} \right) + \varepsilon u^* \frac{\partial^2 u^*}{\partial x^{*2}} - \varepsilon \left( \frac{\partial u^*}{\partial x^*} \right)^2 \right\} \quad (15)$$

式 (14) 及び (15) において、 $D^* = h^* + \varepsilon \eta^*$  であることに注意すると、Green-Naghdi 方程式における右辺の分散項が  $O(\varepsilon \sigma^2)$ 、 $\varepsilon^2 \sigma^2$ 、 $\varepsilon^3 \sigma^2$  を含んでおり、Peregrine 方程式よりも高次の方程式であることがわかる。

ところで、式 (14) 及び (15) において、 $O(\varepsilon) \ll 1$  及び  $O(\varepsilon) = O(\sigma^2)$  として、 $O(\varepsilon^2)$  の項を無視すると、Green-Naghdi 方程式が Peregrine 方程式と一致する。すなわち、Green-Naghdi 方程式は、Peregrine 方程式を含んでいるのである。

### 3. 種々の理論による孤立波解の比較

Green-Naghdi 方程式の孤立波解と種々の理論による孤立波解とを比較し、孤立波解の精度と特性を把握する。Green-Naghdi 方程式 (式 (6) 及び式 (11)) の孤立波解は次式で与えられる (例えば, Bonneton ら, 2011)。

$$\eta(x,t) = a \operatorname{sech}^2 \{ \kappa(x - Ct) \} \quad (16)$$

$$u(x,t) = C \left( 1 - \frac{h_0}{\eta + h_0} \right) \quad (17)$$

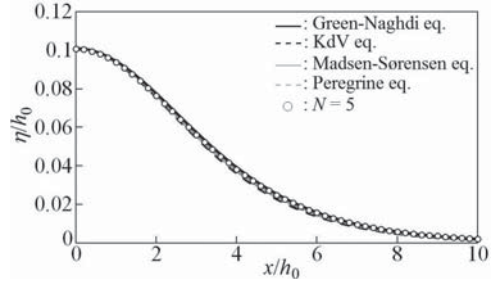
$$\kappa = \frac{1}{h_0} \sqrt{\frac{3}{4} \frac{\varepsilon}{1 + \varepsilon}} \quad (18)$$

$$C = \sqrt{g(h_0 + \varepsilon)} \quad (19)$$

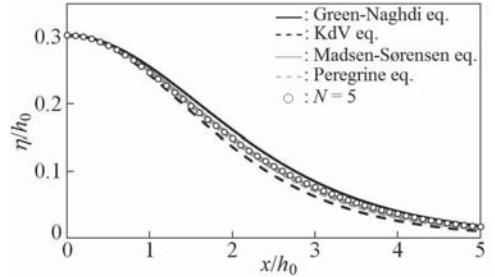
ここで,  $C$  は孤立波の位相速度である。

他方, 岩瀬ら(2002) は, 種々の Boussinesq 型方程式の孤立波の第一次近似解を導出し, Madsen-Sørensen 方程式 (Madsen・Sørensen, 1992) と保存形の Peregrine 方程式 (Peregrine, 1967) の第一次近似解の精度が良好であると結論付けている。そこで, 岩瀬ら (2002) による, Madsen-Sørensen 方程式と保存形の Peregrine 方程式の第一次近似解を比較対象とする。また, KdV 理論解や, Longuet-Higgins・Fenton (1974) の孤立波解, 並びに, 山下・柿沼 (2013) の手法によって得られる柿沼 (2001) の方程式系に対する孤立波解とも比較する。なお, Longuet-Higgins・Fenton (1974) の孤立波解は, 孤立波の高精度数値解として知られる。そして, 柿沼 (2001) の方程式系の孤立波解が Longuet-Higgins・Fenton (1974) の孤立波解と調和的であることが確認されているため (Yamashita・Kakinuma, 2015), 本研究では, これら二つの孤立波解を高精度の解とみなす。

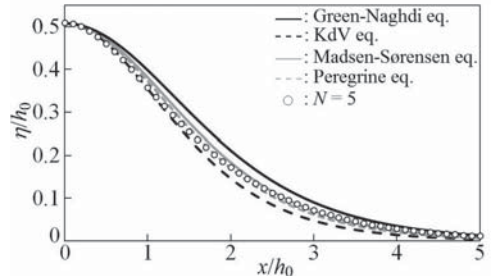
図-2 (a) - (c) に, 孤立波の水面形を示す。ここで, 波峰の水平位置が  $x = 0$  であり, 水面変動  $\eta$  及び水平軸  $x$  の両者を, 静水深  $h_0$



(a) 波高・水深比  $\varepsilon = 0.10$



(b) 波高・水深比  $\varepsilon = 0.30$



(c) 波高・水深比  $\varepsilon = 0.51$

図-2 孤立波の水面形

によって無次元化している。また, 図中の「 $N = 5$ 」は, 柿沼 (2001) の表面波方程式系において, 速度ポテンシャルの展開項数  $N$  を 5 とした場合の数値解である。ここで, 速度ポテンシャル  $\phi$  の鉛直分布は, 重み係数  $f_\alpha$  と鉛直軸  $z$  を用いた重み付き級数として, 次式で定義される。

$$\phi = \sum_{\alpha=0}^{N-1} z^\alpha \cdot f_\alpha(x,t) \quad (20)$$

図によると, 波高・水深比が,  $\varepsilon = 0.10$  である場合, 種々の孤立波解の水面形は殆ど一致する。そして,  $\varepsilon$  が相対的に大きい場合においても ( $\varepsilon = 0.30$  及び  $0.51$ ), Peregrine 方程

式及び Madsen-Sørensen 方程式の孤立波解と高精度数値解 ( $N = 5$ ) との一致度が高いことがわかる。他方, Green-Naghdi 方程式と KdV 方程式の理論解は,  $\varepsilon$  の増加に伴い, 高精度数値解との差異が大きくなる。すなわち, KdV 理論解は, 高精度数値解より急峻となり, 他方, Green-Naghdi 理論解は, 丸みを帯びる。

ところで, 種々の孤立波の水面形は,  $\varepsilon$  の増加に伴い, 波の水平スケールが小さくなるという傾向を有している。これは,  $O(\varepsilon) = O(\sigma^2)$  が仮定された KdV 理論から類推すると, 上記の関係を満たすように, 波高の増加に伴い波長が減少するためである。

図-3 に, 孤立波の相対位相速度  $C/C_0$  を示す。ここで, 線形浅水波の位相速度  $C_0 = \sqrt{gh_0}$  を用いて孤立波の位相速度  $C$  を無次元化している。Green-Naghdi 方程式の理論解は, KdV 方程式, Peregrine 方程式及び Madsen-Sørensen 方程式よりも, 高い精度を有しており, Longuet-Higgins・Fenton(1974) 及び  $N = 5$  の高精度数値解と調和的である。

図-4 に, 孤立波の峰の位置における水平方向流速  $u_{\text{crest}}$  を示す。ここで, 式 (6) の連続方程式に移流方程式  $-C\partial\eta/\partial x = \partial\eta/\partial t$  を代入して得られる次式を数値的に解き, 第一次近似解の  $u$  を算出した。

$$-C \frac{\partial\eta}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x}(Du) = 0 \quad (21)$$

なお,  $N = 5$  の  $u_{\text{crest}}$  は水深平均した水平方向流速である。

種々の理論による  $u_{\text{crest}}$  は, 図-2 に示した位相速度と同様の傾向を有する。すなわち, Peregrine 方程式及び Madsen-Sørensen 方程式の水平方向流速の誤差は相対的に大きく, KdV 理論解もやや過大である。他方, Green-Naghdi 理論解は, 高精度数値解と殆ど一致している。

図-5 は, 孤立波のエネルギー  $E$  の無次元量  $E/\rho gh_0^3$  ( $\rho$  は, 流体の密度であり, 定数である。) の比較である。対象領域は,  $-25h_0 \leq x \leq 25h_0$  の範囲であり, 孤立波の全エネルギー  $E$  は次式で定義される。

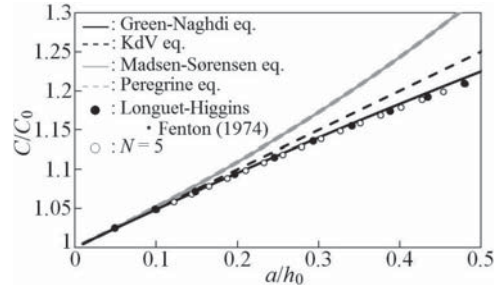


図-3 孤立波の相対波速  $C/C_0$

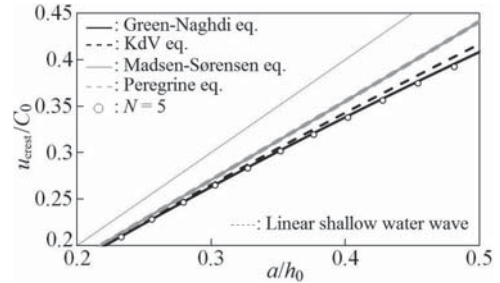


図-4 孤立波の峰の位置における水平方向流速  $u_{\text{crest}}/C_0$

$$E = E_p + E_k \quad (22)$$

$$E_p = \int_{-25h_0}^{25h_0} \int_0^{\eta} \rho g z \, dz dx \quad (23)$$

$$E_k = \int_{-25h_0}^{25h_0} \int_{-h_0}^{\eta} \frac{1}{2} \rho (u^2 + w^2) \, dz dx \quad (24)$$

ここで, KdV 方程式, Peregrine 方程式及び Madsen-Sørensen 方程式では,  $w = 0$  とし, 運動エネルギー  $E_k$  を算出した。他方, Green-Naghdi 方程式の  $w$  (式 (5)) による運動エネルギーの総和は, 全エネルギー  $E$  の, 僅か 0.1% 程度であり, 全エネルギーへは殆ど影響しない。ところで, 図では, 波高・水深比が 0.8 を超える大振幅波も対象にしているが, KdV 方程式, Peregrine 方程式及び Madsen-Sørensen 方程式は, 弱非線形理論であるため, 理論の適用範囲外である。また, Peregrine 方程式及び Madsen-Sørensen 方程式の理論解は第 1 次近似解であるため, 必ずしも, 大振幅波に対する理論の特性を表わして

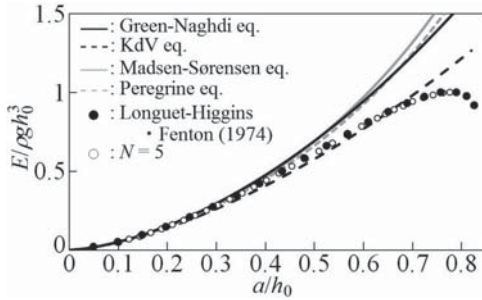


図-5 孤立波の全エネルギーの無次元量  $E/\rho gh_0^3$

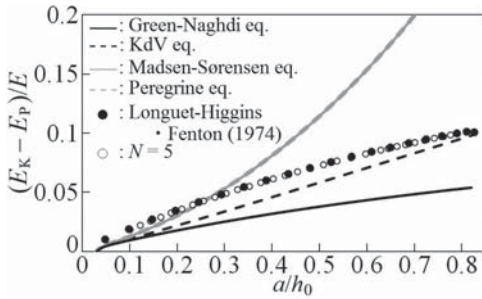


図-6 孤立波の運動エネルギー  $E_k$  と位置エネルギーの差の全エネルギー  $E$  に対する比  $(E_k - E_p)/E$

いるとは限らないことに注意する必要がある。

図-5によると、 $a/h_0$ の値が等しい場合、Green-Naghdi 方程式、Peregrine 方程式及び Madsen-Sørensen 方程式は、エネルギーが過大評価である。そして、KdV 方程式は、 $a/h_0$ が 0.6 以下では、過小評価である。一方、エネルギーが等しい孤立波に関して高精度数値解と比較すると、Green-Naghdi 方程式、Peregrine 方程式及び Madsen-Sørensen 方程式の孤立波の波高・水深比は小さく、KdV 方程式 ( $a/h_0 \leq 0.6$ ) の波高・水深比は大きい。こうしたエネルギーと波高・水深比の関係は、津波計算において、沖合の津波が沿岸域に到達した際の津波の波高に影響すると思われる。すなわち、ある波が分裂せずに、沖合での波のエネルギーを保持して沿岸域に到達する場合、Green-Naghdi 方程式、Peregrine 方程式及び Madsen-Sørensen 方程式によって再現される津波の波高は過小評価であると考えられる。

種々の孤立波の運動エネルギー  $E_k$  と位置エネルギーの差の全エネルギー  $E$  に対する比  $(E_k - E_p)/E$  を比較すると (図-6)、Peregrine 方程式及び Madsen-Sørensen 方程式は、波高・水深比が相対的に小さい場合には、高精度数値解との一致度が高いが、波高・水深比が大きい場合、過大評価である。他方、Green-Naghdi 方程式による孤立波解は、過小評価である。すなわち、エネルギーの意味において、前者は非線形性が強く、後者は非線形性が弱いと言える。

ところで、山下ら (2014) によると、運動エネルギーが卓越する孤立波ほど、鉛直壁での衝突において強い非線形挙動を示す。すなわち、鉛直壁の位置での波高は、入射孤立波の  $(E_k - E_p)/E$  が大きい場合ほど、入射波高の 2 倍を超えて大きくなるのである。従って、Peregrine 方程式及び Madsen-Sørensen 方程式で再現される鉛直壁での重複波の波高は過大に評価され、Green-Naghdi 方程式の場合、過小に評価されると考えられる。

#### 4. Green-Naghdi 方程式を適用した数値モデルの開発

##### 4.1 数値解析手法

Green-Naghdi 方程式に基づく 1 次元伝播計算モデルを開発する。方程式の差分化には、Staggered 格子を用いて、Leap-Frog 陰解法 (佐山ら, 1987) を適用する。例えば、運動方程式の差分方程式は次式で表わされる。

$$\begin{aligned} & \frac{u_{m+1/2}^{n+1} - u_{m+1/2}^n}{\Delta t} + \frac{1}{2} \left( u_{m+1/2}^{n+1} u_{m+1/2}^n \right)_x + g \left( \eta_{m+1/2}^{n+1/2} \right)_x \\ & = D_{m+1/2}^{n+1/2} \left( D_{m+1/2}^{n+1/2} \right)_x \\ & \cdot \left\{ F_0 + u_{m+1/2}^n \left( u_{m+1/2}^n \right)_{xx} - \left[ \left( u_{m+1/2}^n \right)_x \right]^2 \right\} \\ & + \frac{1}{3} \left( D_{m+1/2}^{n+1/2} \right)^2 \\ & \cdot \left\{ F_1 - \left( u_{m+1/2}^n \right)_x \left( u_{m+1/2}^n \right)_{xx} + u_{m+1/2}^n \left( u_{m+1/2}^n \right)_{xxx} \right\} \end{aligned} \quad (25)$$

$$\begin{aligned} F_0 = \frac{1}{2\Delta x \Delta t} & \left\{ \left( u_{m+3/2}^{n+1} - u_{m-1/2}^{n+1} \right) \right. \\ & \left. - \left( u_{m+3/2}^n - u_{m-1/2}^n \right) \right\} \end{aligned} \quad (26)$$

$$F_1 = \frac{1}{(\Delta x)^2 \Delta t} \left\{ \left( u_{m+3/2}^{n+1} - 2u_{m+1/2}^{n+1} + u_{m-1/2}^{n+1} \right) - \left( u_{m+3/2}^n - 2u_{m+1/2}^n + u_{m-1/2}^n \right) \right\} \quad (27)$$

ここで、添え字  $x$  は、 $x$  に関する 2 次精度の中央差分であることを示す。また、式 (25) ~ (27) の行列式を Thomas 法で解く。

#### 4.2 擬似微分方程式に基づく数値誤差の低減

偏微分方程式を数値的に解く場合、数値粘性や数値分散といった数値誤差が含まれる。このため、例えば、孤立波のような定常進行波の解析では、数値誤差が定常進行波の定常性を損ねてしまうだけではなく、計算の不安定を招く場合がある。数値粘性や数値分散は、本来の偏微分方程式と擬似微分方程式(今村・後藤, 1986) との差分である余剰項が原因である。ここで、擬似微分方程式とは、差分方程式の各項を Taylor 展開して得られる偏微分方程式のことである。

本節では、擬似微分方程式に基づいて、本数値モデルの数値誤差の低減方法を示す。ここでは、定常進行波の解析を行なう場合に現われる数値誤差を対象として議論を行なう。そこで、まず、式 (25) ~ (27) から得られる擬似微分方程式の時間微分項に移流方程式を代入し、定常進行波に対する擬似微分方程式を得る。そして、得られた擬似微分方程式を無次元化するために、位相速度  $C$ 、計算格子間隔  $\Delta x$  及び計算時間間隔  $\Delta t$  に関する次の無次元量を導入する。

$$C^* = \frac{C}{C_0}, \quad \Delta x^* = \frac{\Delta x}{\lambda}, \quad \Delta t^* = \frac{C_0}{\lambda} \Delta t \quad (28)$$

ここで、クーラン数  $K = C_0 \Delta t / \Delta x$  を用いると、 $\Delta t^*$  として次式を得る。

$$\Delta t^* = \frac{C_0}{\lambda} \Delta t = K \Delta x^* \quad (29)$$

なお、 $\Delta x^*$  及び  $\Delta t^*$  は、それぞれ、波形及び時間の解像度を意味しているため、一般に、 $O(\Delta x^*, \Delta t^*) \ll 1$  であり、式 (12) における「\*」

付きの無次元量のオーダーとは異なる。

有次元量に関する擬似微分方程式に、式 (12)、(28) 及び (29) を代入すると、次式に示す無次元量に関する擬似微分方程式を得る。

$$-C^* \frac{\partial u^*}{\partial x^*} + \varepsilon u^* \frac{\partial u^*}{\partial x^*} + \frac{\partial \eta^*}{\partial x^*} = \sigma^2 \frac{1}{3D^*} \frac{\partial G_0^*}{\partial x^*} + F_0^* + F_1^* + F_2^* + F_3^* \quad (30)$$

$$G_0^* = D^{*3} \left\{ -C^* \frac{\partial}{\partial x^*} \left( \frac{\partial u^*}{\partial x^*} \right) + \varepsilon u^* \frac{\partial^2 u^*}{\partial x^{*2}} - \varepsilon \left( \frac{\partial u^*}{\partial x^*} \right)^2 \right\} \quad (31)$$

$$F_0^* = O(\varepsilon^2 \sigma^2 K \Delta x^*, \varepsilon^2 \sigma^2 (\Delta x^*)^2) \quad (32)$$

$$F_1^* = -\frac{1}{2} K \Delta x^* C^* \frac{\partial^2 u^*}{\partial x^{*2}} + O(K^2 (\Delta x^*)^2) \quad (33)$$

$$F_2^* = O(\varepsilon K \Delta x^*, \varepsilon (\Delta x^*)^2) \quad (34)$$

$$F_3^* = \frac{1}{2} K \Delta x^* C^* \frac{\partial^2 \eta^*}{\partial x^{*2}} + O((\Delta x^*)^2) \quad (35)$$

ここで、式 (32) ~ (35) が余剰項であり、数値粘性や数値分散といった数値誤差として解析結果に影響する。

$F_0^*$  は、式 (25) における右辺の分散項から生じる余剰項である。また、 $F_1^*$ 、 $F_2^*$  及び  $F_3^*$  は、それぞれ、式 (25) の左辺第 1 項、第 2 項及び第 3 項から生じる余剰項である。式 (32) 及び (34) に関しては、オーダー表記でまとめて記載した。

$O(\varepsilon) = O(\sigma^2) = 1$  である場合、式 (32) ~ (35) のオーダーは、 $O(K \Delta x^*)$ 、または、 $O((\Delta x^*)^2)$  であり、数値誤差の大きさは、波形と時間の解像度だけに依存する。しかしながら、長波領域を対象とする場合、 $O(\sigma^2)$  を含む式 (32) は、式 (33) ~ (35) と比較すると、影響が

小さいことがわかる。また、数値分散として影響する式 (34) は、 $O(\varepsilon)$  を含んでいるため、波高・水深比が小さければ、影響は比較的小さい。

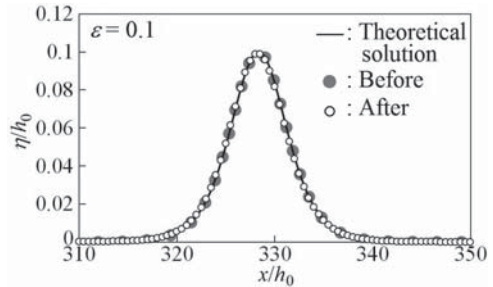
他方、式 (33) 及び (35) のオーダは、対象とする波が如何なる波であっても、相対的に大きい。特に、式 (33) は、負値であるため、負の拡散項として、波高の増幅をもたらす、計算の不安定を招く原因になる。

以上のように、対象とする波動場に応じて、数値誤差の影響程度が変化する。従って、これら全ての数値誤差を低減することが望ましいが、本研究では、影響程度が大きい数値誤差のみを低減する。すなわち、平山ら (1999) と同様に、式 (33) 及び (35) の右辺第 1 項を打ち消すための誤差修正項を導入して、数値モデルの高精度化を図った。

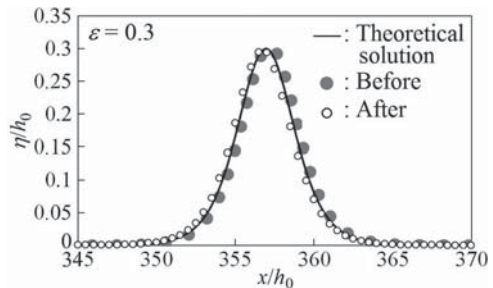
#### 4.3 数値モデルで再現される孤立波の定常性

前節で開発した数値モデルの安定性を調べるために、孤立波の 1 次元伝播計算を行なう。一樣静水深が  $h_0 = 1.0 \text{ m}$  の水域を計算対象領域として、式 (16) ~ (19) に示した孤立波解を入射波として与える。そして、本数値モデルで再現される孤立波の定常性を調べる。計算格子間隔及び計算時間間隔は、それぞれ、 $\Delta x = 0.1 \text{ m}$  及び  $\Delta t = 0.0005 \text{ s}$  ( $K = 0.016$ ) とする。

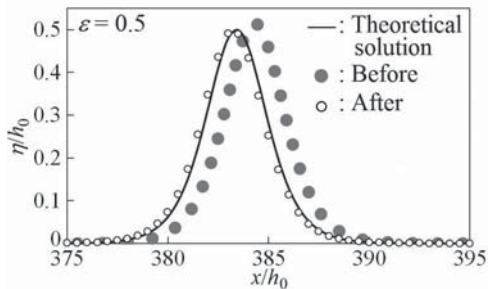
図-7 (a) - (c) に、孤立波の 1 次元伝播計算の結果を示す。図は、水平床上を 100 s 間伝播した後の水面形であり、誤差修正項の導入前と導入後の結果を、式 (16) ~ (19) の理論解と比較している。入射波の波高・水深比が 0.10 である場合、修正前後の結果に違いは殆ど認められず、孤立波の定常性が確認される。これは、波形や時間の解像度が高く、且つ、波高・水深比が小さいため、式 (32) のみならず、式 (33) ~ (35) の数値誤差の影響も小さいためである。他方、波高・水深比が 0.30、または、0.51 である場合、誤差修正項の導入前の結果には、孤立波の定常性が認められない。すなわち、入射波の波高が大きい場合ほど、伝播に伴い波高が増幅し



(a) 波高・水深比  $\varepsilon = 0.10$



(b) 波高・水深比  $\varepsilon = 0.30$



(c) 波高・水深比  $\varepsilon = 0.51$

図-7 水平床上を伝播する孤立波の水面形

ており、このため、位相速度も大きい。これは、孤立波の波高が大きい場合ほど、孤立波の水平スケールが小さくなるためである (図-2, または、図-7)。すなわち、式 (28) 及び (29) に示されるように、波形及び時間の解像度の両者が低下し、式 (33) の負の拡散項の影響が増大するためである。しかしながら、誤差修正項を導入すると、定常性が殆ど保たれることがわかる。

なお、計算の安定性向上のみを目的として、式 (33) の数値誤差を修正し、式 (35) の数値誤差を修正しない場合、数値粘性の影響のため、波高が減衰する結果となる。これは、



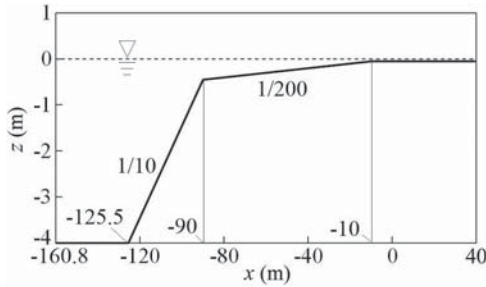


図-8 大陸棚を模した計算対象領域

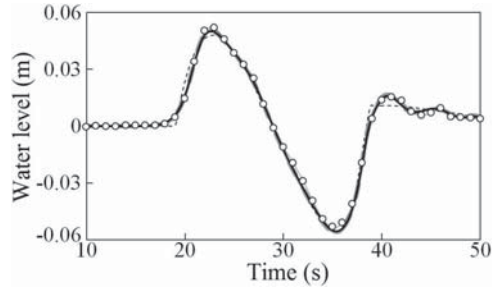
これら両者の誤差修正項のオーダーが等しいためである。すなわち、ある項の誤差を修正しようとする場合、その項と同じオーダーを有する項の全てに対して修正を行なう必要がある。

### 5. ソリトン分裂する大振幅津波の再現計算

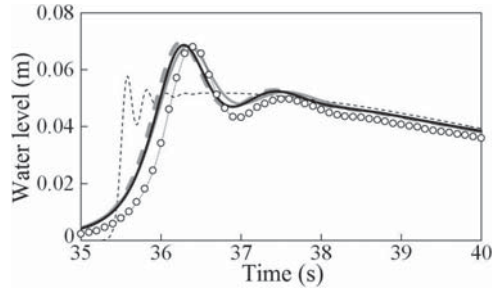
Green-Naghdi 方程式に基づく本数値モデルの、大振幅津波を対象とした解析への適用性を調べる。そこで、大振幅津波のソリトン分裂に関する水理実験(松山ら, 2006)の再現計算を行なう。また、本数値モデルと従来型の種々の理論モデルの比較も実施する。そこで、非線形浅水方程式、保存形の Peregrine 方程式及び Madsen-Sørensen 方程式を基礎方程式とする数値モデルを作成した。なお、非線形浅水方程式は、TUNAMI モデル(東北大学モデル)と同様の手法で解き、Peregrine 方程式及び Madsen-Sørensen 方程式は、Green-Naghdi 方程式と同様に、Leap-Frog 陰解法で解く。

図-8 に大陸棚を模した計算対象領域を示す。陸棚斜面は勾配が 1/10 であり、陸棚上の斜面勾配は 1/200 である。また、遡上計算を行なわない本計算では、 $-10 \text{ m} \leq x \leq 40 \text{ m}$  の領域を一樣静水深 0.05 m の水平床に設定した。なお、 $-10 \text{ m} \leq x \leq 40 \text{ m}$  における一樣勾配斜面を、 $x$  の正の方向に延長すると、汀線は、 $x = 0.0 \text{ m}$  に位置することになる。すなわち、松山ら(2006)の水理実験で用いられた水理模型装置に相当する。

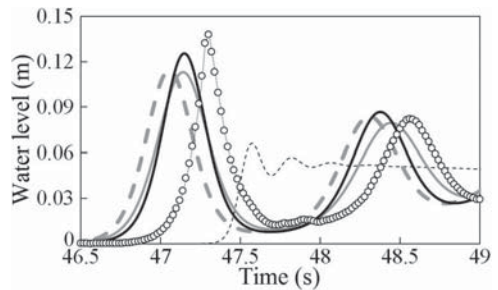
本計算の入射波として、松山ら(2006)の



(a)  $x = -80.0 \text{ m}$ ;  $h = 0.4 \text{ m}$



(b)  $x = -50.0 \text{ m}$ ;  $h = 0.25 \text{ m}$



(c)  $x = -30.8 \text{ m}$ ;  $h = 0.154 \text{ m}$

図-9 図-8 の各地点における水位の時間変化(黒色実線: Green-Naghdi 方程式, 黒色破線: 非線形浅水波方程式, 灰色実線: Madsen-Sørensen 方程式, 灰色破線: Peregrine 方程式, 点線付き○: 松山ら(2006)の実験結果)

水理実験と同様に、 $x = -160.8 \text{ m}$  に位置する境界から、押し波から始まる 1 周期分の正弦波を与える。正弦波の片振幅及び周期は、それぞれ、0.03 m 及び 20 s である。そして計算格子間隔及び計算時間間隔は、それぞれ、 $\Delta x = 0.1 \text{ m}$  及び  $\Delta t = 0.001 \text{ s}$  とする。なお、摩擦によるエネルギー損失に関しては、水理模型の底面粗度が明らかではないため、本計算では、底面摩擦を考慮しない。

図-9 (a) - (c) に、水位の時間変化を示す。ここで、図-8 の、 $x = -80.0$  m,  $-50.0$  m 及び  $-30.8$  m の位置における結果であり、それぞれの数値モデルの計算結果を松山ら (2006) の水理実験結果と比較している。

非線形浅水方程式、Peregrine 方程式及び Madsen-Sørensen 方程式と Green-Naghdi 方程式による計算結果は、陸棚斜面を通過した直後の、僅かに前傾化する津波の挙動を高い精度で再現している (図-9 (a);  $x = -80.0$  m,  $h = 0.4$  m)。この地点を通過する津波の、波高・水深比及び水深・波長比の両者が比較的小さく、各理論の適用範囲内の津波であるため、各モデルにおける差異が小さいのである。しかし、津波が浅水域を暫く伝播すると生じるソリトン分裂の初期の様子を、非分散波理論である非線形浅水方程式では再現できておらず、数値的な分裂が生じている (図-9 (b);  $x = -50.0$  m,  $h = 0.25$  m)。他方、分散波理論である Peregrine 方程式、Madsen-Sørensen 方程式及び Green-Naghdi 方程式による計算結果は、ソリトン分裂を良好に再現している。但し、これらの計算結果の位相速度が、実験結果と比較して僅かに大きい。これは、図-3 に示されるように、これらの孤立波解の位相速度が真値よりも大きいためであると考えられる。

また、 $x = -30.8$  m の地点では (図-9 (c))、波高・水深比が 0.89 である非常に大振幅である分裂波が水理実験により得られている。こうした大振幅波に対する、非線形浅水方程式による計算結果は、数値粘性により、波高が大きく減衰している。他方、Peregrine 方程式、Madsen-Sørensen 方程式及び Green-Naghdi 方程式の計算モデルから得られた波高・水深比は、それぞれ、0.74, 0.73 及び 0.81 である。波高に関して、Green-Naghdi 方程式による計算結果が実験結果を最も良く再現しており、大振幅津波への適用性が高いことがわかる。

## 6. 結 論

Green-Naghdi 方程式を基礎方程式系とした、高精度・高効率な津波解析モデルを開発することを目的として、まず、Green-Naghdi 方程式の孤立波解を種々の理論解や高精度数値解と比較し、種々の孤立波解の精度と特性を調べた。次に、Green-Naghdi 方程式を高精度に解くための、1次元伝播計算モデルを開発した。最後に、本数値モデルや種々の理論モデルを適用して、ソリトン分裂を対象とした既往の水理実験の再現計算を行ない、大振幅津波に対する本数値モデルの適用性を調べた。

得られた結論は以下の通りである。

- Green-Naghdi 方程式の孤立波解は、高精度の解よりも丸みを帯びた水面形を示す。しかしながら、位相速度や流速の、高精度の解との整合性は高い。従って、Green-Naghdi 方程式は、流速場の再現性を重視した解析に、優位であると考えられる。
- Peregrine 方程式及び Madsen-Sørensen 方程式の孤立波解の水面形は、高い精度を有するが、位相速度及び流速場を過大に評価する。
- Green-Naghdi 方程式による孤立波が鉛直壁に衝突する場合、波高増幅率が過小になり、他方、Peregrine 方程式及び Madsen-Sørensen 方程式では、過大になると考えられる。従って、海岸構造物周辺での解析では、採用する基礎方程式に注意する必要がある。
- Green-Naghdi 方程式の差分方程式に対して、無次元量の擬似微分方程式を導出し、数値誤差の影響程度を示した。
- 無次元化した擬似微分方程式に基づく誤差修正項を導入し、数値誤差の影響が小さい、安定で高精度な数値モデルを開発した。
- Green-Naghdi 方程式を適用した本数値モデルが、従来の Boussinesq 型モデルと比較して、大振幅津波のソリトン分裂を良好に再現することがわかった。

今後は、本数値モデルを2次元平面場に拡張して、種々の理論モデルによって再現され

る、ソリトン分裂津波による流れ場や、海岸構造物周辺での挙動の特性を明らかにしたい。

## 謝 辞

一般財団法人電力中央研究所の松山昌史上席研究員に、水理実験結果の貴重なデータを頂戴しました。ここに感謝の意を表します。

## 参考文献

- 磯部雅彦：非線形緩勾配波動方程式の提案，海岸工学論文集，第 41 巻，pp.1-5，1994.
- 今村文彦・後藤智明：差分法による津波数値計算の打ち切り誤差，土木学会論文集，第 375 号，II-6，pp. 241-250，1986.
- 岩瀬浩之・深澤雅人・後藤智明：ソリトン分裂波の碎波変形に関する水理実験と数値計算，海岸工学論文集，第 48 巻，pp.306-310，2001.
- 岩瀬浩之・見上敏文・後藤智明・藤間功司：津波の伝播計算を対象とした非線形分散長波式の比較，土木学会論文集，No.7058/II-59，pp.129-138，2002.
- 岩瀬浩之：津波発生域から沿岸域までの分散効果を取り入れた数値モデルの研究，東北大学大学院博士論文，166p.，2005.
- 柿沼太郎：透水性海浜における内部波の挙動の数値計算，海岸工学論文集，第 48 巻，pp.146-150，2001.
- 韓 世燮・都司嘉宣：Green-Naghdi 方程式を用いた津波の非線形計算，月刊海洋，号外，No. 28，総特集，津波研究の最前線・II - 過去の津波の事例研究 - ，pp. 199-204，2002.
- 佐藤慎司：波の分裂と碎波を考慮した津波の数値計算，海岸工学論文集，第 42 巻，pp.376-380，1995.
- 佐山順二・今村文彦・後藤智明・首藤伸夫：外海域における津波の高精度計算法に関する検討，第 34 回海岸工学講演会論文集，pp.177-181，1987.
- 嶋原良典・藤間功司：津波数値解析における分散波理論モデルの適用性と新しい数値計算法の提案，土木学会論文集 B，Vol. 63，No.1，pp.51-66，2007.
- 都司嘉宣：Green-Naghdi 計算法による津波の 2 次元非線形計算，月刊海洋，号外，No. 15，総特集，津波研究の最前線，pp. 135-138，1998.
- 灘岡和夫・中川康之：新しい非線形・分散性波動方程式による非線形波動場解析の試み，海岸工学論文集，第 40 巻，pp.6-10，1993.
- 後野正雄：強非線形平面不規則波動場に対する連成振動方程式とその基礎的特性，海岸工学論文集，第 41 巻，pp.16-20，1994.
- 平山克也・加藤雅也・平石哲也：ADI 差分法を用いたブシネスクモデルの打ち切り誤差解析，海岸工学論文集，第 46 巻，pp. 86-90，1999.
- 松山昌史・池野正明・榊山 勉・武田智吉：大陸棚上における津波のソリトン分裂波に関する碎波モデル，海岸工学論文集，第 53 巻，pp.226-230，2006.
- 村嶋陽一・越村俊一・岡 秀行・村田泰洋・藤間功司・杉野英治・岩淵洋子：非線形分散波理論モデルによる東北地方太平洋沖地震津波のソリトン分裂の再現，土木学会論文集 B2 (海岸工学)，Vol.68，No.2，I\_206-I\_210，2012.
- 山下 啓・柿沼太郎：非線形波動方程式系に基づく表面孤立波及び内部孤立波の数値解，土木学会論文集 B2 (海岸工学)，Vol.69，No.2，I\_006-I\_010，2013.
- 山下 啓・柿沼太郎・吉本明日妃・吉川 諒：大振幅内部孤立波の伝播過程における非線形現象，土木学会論文集 B2 (海岸工学)，Vol.70，No.2，I\_006-I\_010，2014.
- Baba, T., Takahashi, N., Kaneda, Y., Inazawa, Y. and Kikkonjin, M.: Tsunami Inundation Modeling of the 2011 Tohoku Earthquake Using Three-Dimensional Building Data for Sendai, Miyagi Prefecture, Japan, Tsunami Events and Lessons Learned, Advances in

- Natural and Technological Hazards Research, Vol.35, pp.89-98, 2014.
- 20) Bonneton, P., Barthelemy, E., Chazel, E., Cienfuegos, R., Lannes, D., Marche, F. and Tissier, M.: Recent advances in Serre-Green Naghdi modelling for wave transformation, breaking and runup processes, *European Journal of Mechanics B/Fluids*, Vol. 30, pp. 589-597, 2011.
- 21) Ertekin, R. C., Webster, W. C. and Wehausen, J. V.: Waves caused by a moving disturbance in a shallow channel of finite width, *J. Fluid Mech.*, Vol. 169, pp. 275-292, 1986.
- 22) Green, A. E. and Naghdi, P. M.: A derivation of equations for wave propagation in water of variable depth. *J. Fluid Mech.*, Vol. 78, pp. 237-246, 1976.
- 23) Longuet-Higgins, M. S. and Fenton, J. D.: On the mass, momentum, energy and circulation of a solitary wave. II, *Proc. Roy. Soc. London, Ser. A*, Vol. 340, pp. 471-493, 1974.
- 24) Madsen, P. A. and Sørensen, O. R.: A new form of the Boussinesq equations with improved linear dispersion characteristics, Part 2, A slowly-varying bathymetry, *Coastal Eng.*, Vol. 18, pp. 183-204, 1992.
- 25) Nakayama, K. and Kakinuma, T.: Internal waves in a two-layer system using fully nonlinear internal-wave equations, *Int. J. Numer. Meth. Fluids*, Vol. 62, pp. 574-590, 2010.
- 26) Peregrine, D. H.: Long waves on a beach, *J. Fluid Mech.*, Vol. 27, pp. 815-827, 1967.
- 27) Yamashita, K. and Kakinuma, T.: Properties of surface and internal solitary waves, *Proc. 34th Int. Conf. on Coastal Eng.*, waves. 45, 15 pages, 2015.