

マントル及び地殻上の海水を伝播する津波の数値解析

柿沼 太郎*・吉川 諒*・山下 啓**

1. 序 論

1960 年チリ地震津波及び 2010 年チリ・マウレ地震津波は、日本を含む環太平洋地域に広く伝播した。ところで、従来実施されている、浅水方程式系に基づく遠地津波の数値解析では、津波第 1 波のピーク到達時刻が、実際の到達時刻より早い時刻として算出されることが知られている（綿田ら, 2011; 楠本ら, 2012; Inazu and Saito, 2013; 高川, 2013）。

そこで、本研究では、この原因を地殻やマントルに求める。すなわち、海水下にあるプレートが弾性体であり、また、その下方にあるマントル上層が流体のように振る舞うと仮定して、プレートやマントルの運動を考慮した津波伝播の数値解析を行なう。そして、これらの運動が、津波の伝播にどのような影響を及ぼすのかに関して調べる。

2. 対象とする地球のモデル

静水深 h_w が一様である海域を対象とする。海水の密度を ρ_w とする。図-1 に示すように、この海水下に海底面があり、その下に地殻が、更にその下方に、マントル（上部マントル）が存在する。

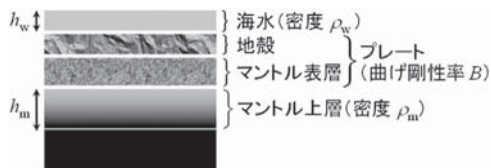


図-1 地球の構造モデル

このうち、地殻及びマントル表層からなるプレートが、水平スケールの大きな一つの弾性体であり、法線方向の変位が一定となる中立面を有すると仮定する。このとき、プレートの運動は、プレートの厚さを考慮することなく、中立面上で考えることができる。プレートの平均的な曲げ剛性率を B とする。

他方、プレート下方にあるマントル上層が、完全流体であると仮定する。マントル上層の鉛直方向の深さを h_m とし、マントルの密度を ρ_m とする。そして、マントル上層の下面が、水平な固定床であると仮定する。すなわち、解析対象の初期状態は、水平な固定床の上に、マントル上層に相当する深さ h_m の流体があり、その上に、プレートに相当する厚さ 0 の薄板が乗り、この薄板の上に、津波の伝播する深さ h_w の海水が乗っている状態となる。海水の上面は、自由水面とする。

3. 数値解析手法

上記のような、海水、プレート及びマントル上層の連成モデルを対象とした数値解析のために、多層流体と大規模薄板構造物の相互干渉の解析のための数値モデル (Kakinuma *et al.*, 2012) を用いる。本数値モデルでは、流体運動として、非粘性・非圧縮性である多層流体の非回転運動を対象とする。すなわち、簡単のために、マントル上層を完全流体と仮定するが、マントル上層の密度 ρ_m 及び深さ h_m によって、マントル上層の不明確な流動性や流動範囲を規定する。例えば、マントル上層が、より動きにくい状態を想定する場合には、マントル上層の密度 ρ_m の値を大きく設定する。

図-2 において、互いに混合しない各流体層を最上層から順に第 i 層 ($i = 1, 2, \dots, I$)

* 鹿児島大学大学院理工学研究科

** 東北大学災害科学国際研究所

と呼ぶ。

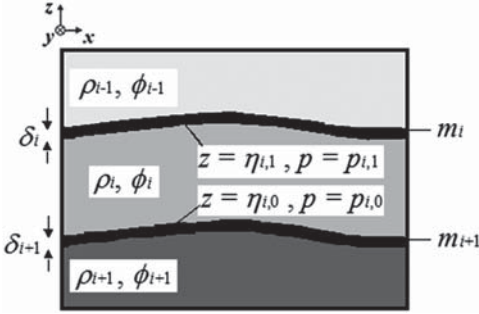


図-2 薄板状構造物と多層流体

鉛直軸 z は、原点が静水面に位置するとし、鉛直上向きを正とする。次式のように、各層の速度ポテンシャル ϕ_i を N 個のべき関数の重み付き級数に展開する。

$$\phi_i(\mathbf{x}, z, t) = \sum_{\alpha=0}^{N-1} \{f_{i,\alpha}(\mathbf{x}, t) \cdot z^\alpha\} \quad (1)$$

そして、変分法を適用すると、次式のような非線形表面波・内部波方程式系が得られる(柿沼, 2001)。

$$\begin{aligned} \eta_{i,1}^\alpha \frac{\partial \eta_{i,1}}{\partial t} - \eta_{i,0}^\alpha \frac{\partial \eta_{i,0}}{\partial t} \\ + \nabla \left\{ (\eta_{i,1}^{\alpha+\beta+1} - \eta_{i,0}^{\alpha+\beta+1}) \nabla f_{i,\beta} \right\} \\ - \frac{\alpha\beta}{\alpha+\beta-1} (\eta_{i,1}^{\alpha+\beta-1} - \eta_{i,0}^{\alpha+\beta-1}) f_{i,\beta} = 0 \end{aligned} \quad (2)$$

$$\begin{aligned} \eta_{i,0}^\beta \frac{\partial f_{i,\beta}}{\partial t} + \frac{1}{2} \eta_{i,j}^{\beta+\gamma} \nabla f_{i,\beta} \nabla f_{i,\gamma} \\ + \frac{1}{2} \beta \gamma \eta_{i,j}^{\beta+\gamma-2} f_{i,\beta} f_{i,\gamma} + g \eta_{i,j} \\ + \frac{p_{i,j} + P_i + W_i}{\rho_i} = 0 \quad (j=0 \text{ or } 1) \end{aligned} \quad (3)$$

ここで、添え字 α , β 及び γ に関して、積の総和規約を用いている。 $\eta_{i,0}(\mathbf{x}, t)$, $\eta_{i,1}(\mathbf{x}, t)$, $p_{i,0}(\mathbf{x}, t)$, $p_{i,1}(\mathbf{x}, t)$ 及び ρ_i は、それぞれ、第 i 層の下面の界面変動、上面の界面変動、下面における圧力、上面における圧力及び密度であ

る。式(3)中の P_i 及び W_i は、それぞれ、次式で表わされる。

$$P_i = \sum_{k=1}^{i-1} \{(\rho_i - \rho_k) g h_k\} \quad (4)$$

$$W_i = \sum_{k=1}^i (-m_k g \delta_k) \quad (5)$$

ここで、 h_i は、第 i 層の静水深であり、 m_i 及び δ_i は、それぞれ、第 i 層の上面に位置する第 i 板の、密度及び板厚である。また、 $\nabla = (\partial/\partial x, \partial/\partial y)$ は、水平方向の微分演算子である。重力加速度 g は、 9.8 m/s^2 とする。

一方、十分に薄い第 i 板の運動は、古典理論より、次式で表わされる。

$$\begin{aligned} m_i \delta_i \frac{\partial^2 \eta_{i,1}}{\partial t^2} + B_i \nabla^2 \nabla^2 \eta_{i,1} \\ + m_i g \delta_i + p_{i-1,0} - p_{i,1} = 0 \end{aligned} \quad (6)$$

ここで、 B_i は、第 i 板の曲げ剛性率である。

波高、波長、水深及び密度の代表値をそれぞれ H , l , d 及び ρ として、諸量を次式のように無次元化する。

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{x}^* &= \frac{\mathbf{x}}{l}, \quad t^* = \frac{\sqrt{gd}}{l} t, \\ \nabla^* &= l \nabla, \quad \frac{\partial}{\partial t^*} = \left(\frac{\partial}{\partial t} \right)^* = \frac{l}{\sqrt{gd}} \frac{\partial}{\partial t}, \\ \eta_{i,e}^* &= \frac{\eta_{i,e}}{H}, \quad \delta_i^* = \frac{\delta_i}{H}, \quad m_i^* = \frac{m_i}{\rho}, \\ B_i^* &= \frac{B_i}{\rho g l^4}, \quad p_{i,e}^* = \frac{p_{i,e}}{\rho g d} \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

式(7)を式(6)に代入して、次式を得る。

$$\begin{aligned} \varepsilon^2 \sigma^2 m_i^* \delta_i^* \frac{\partial^2 \eta_{i,1}^*}{\partial t^{*2}} + \varepsilon B_i^* \nabla^{*2} \nabla^{*2} \eta_{i,1}^* \\ + \varepsilon m_i^* \delta_i^* + p_{i-1,0}^* - p_{i,1}^* = 0 \end{aligned} \quad (8)$$

ここで、 $\varepsilon = H/d$ 及び $\sigma = dl$ は、それぞれ、波高水深比及び水深波長比の代表値である。Takagi (1997) と同様に、各層が相対的に

浅いと仮定し、薄板の運動に対して、 $O(\epsilon) = O(\sigma^2) \ll 1$ までのオーダーを考慮する。すると、式 (8) の (左辺第 1 項) が無視される。この項を無視し、式 (8) を有次元量に関する式に戻して、第 i 板の方程式が次式となる。

$$B_i \nabla^2 \nabla^2 \eta_{i,1} + m_i g \delta_i + p_{i-1,0} - p_{i,1} = 0 \quad (9)$$

以上により、式 (2), (3) 及び (9) を本数値モデルの基礎方程式系とする。

Nakayama and Kakinuma (2010) は、内部波の 1 次元伝播を対象とした差分法を提案しているが、これを薄板状構造物と多層流体の連成問題が扱えるように拡張する。そして、この拡張した差分法を用いて、式 (2), (3) 及び (9) を解く。

簡単のために、各層の上・下面及び壁面における摩擦を無視する。また、初期状態において、速度ポテンシャルの重み係数 $f_{i,\alpha}(x,0)$ をすべて 0、すなわち、初期流速を至る所で 0 とする。

山下ら (2011) は、本解析手法の検証のために、1 層問題を対象とした既存の水理実験結果と数値解析結果を比較して、薄板状浮体の応答の再現性を調べた。すなわち、劉・塚 (2000) は、造波水路内に、曲げ剛性率を有する薄板状浮体を設置し、薄板状浮体に孤立波が入射する場合の水理実験を行なったが、この水理実験結果に対する本解析手法の再現性は、良好であった。

4. マントル上層及びプレートの運動が津波に与える影響

水面形及び海底面形をそれぞれ $z = 0$ m 及び $z = -h_w$ からの変動を用いて、 $z = \eta_{1,1} = \eta$ 及び $z = \eta_{1,0} + h_w = b + h_w$ と表わす。

鉛直壁を $x = 0$ km に設け、時刻 $t = 0$ s の津波初期波形を次式で与える。

$$\eta(x,0) / a_0 = 1 + \cos[2\pi(x/L_0)], \quad (10)$$

where $0 \text{ km} \leq x \leq L_0 / 2$

ここで、 $a_0 = 5.0$ m とする。また、 L_0 は、津波の初期波長であり、 $L_0 = 200$ km である場合を対象とする。

流体運動には、速度ポテンシャル ϕ の鉛直分布関数の展開項数を $N = 3$ として、 $\phi(x,z,t) = f_0(x,t) + z f_1(x,t) + z^2 f_2(x,t)$ と展開した非線形波動方程式系を適用し、波の分散性を考慮する。

海水の密度を $\rho_w = 1,000 \text{ kg/m}^3$ とし、海水の静水深 h_w が $4,000$ m で一様であるとする。すると、計算対象のパラメタは、マントル上層の密度 ρ_m 、マントル上層の深さ h_m 、そして、プレートの曲げ剛性率 B となる。これらのパラメタの値は、明らかとなっていないため、これら三つのパラメタの値が異なる場合の数値解析を実施し、マントル上層やプレートの運動が津波の伝播過程に与える影響を調べる。

図-3 に、上記の三つのパラメタの値をそれぞれ $B = 0.0 \text{ Nm}^2$ 及び $\rho_m = 3,300 \text{ kg/m}^3$ 、そして、 $h_m = 1,000$ m, $6,000$ m, または、 $196,000$ m と仮定した場合の、時刻 $t = 2,000$ s における水面形 $z = \eta$ 及び海底面形 $z = b + h_w$ の数値解析結果を示す。

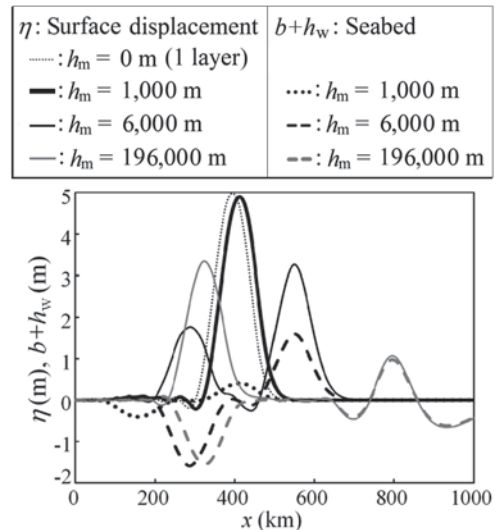


図-3 時刻 $t = 2,000$ s における水面形及び海底面形 ($B = 0.0 \text{ Nm}^2$, $\rho_m = 3,300 \text{ kg/m}^3$)

ここで、比較のために、マントル上層及びプレートとの両者の運動を考慮しない場合の、一様静水深 4,000 m の海域を伝播する 1 層問題の津波の水面形 ($h_m = 0$ m の η のグラフ) が描かれている。

図-3 において、マントル上層の流体運動に伴い、表面波モードと内部波モードの津波が伝播する様子が確認できる。すなわち、水面形と海底面形が同位相である表面波モードと、逆位相である内部波モードの二つのモードが現れている。図-3 より、第 1 波の波速は、マントル上層の深さ h_m がこれらのいずれの値をとる場合でも、1 層問題の津波より大きい。これは、波速が線形波の波速で近似できると仮定すると、表面波モードの波速 $\sqrt{g(h_w + h_m)}$ が、1 層問題の津波の波速 $\sqrt{gh_w}$ より大きいためである。

なお、この表面波モードの第 1 波は、Nakamura and Watanabe (1961) で述べられた「先駆波」とは、異なる波である。この「先駆波」は、津波の第 1 波が大陸棚や湾等に到達してから生じる振動であり、峰や谷のピーク前方に、地形等の影響により生じた別の峰や谷が存在する現象を指している。

また、図-3 より、内部波モードは、マントル上層の深さ h_m が大きいほど、津波高さが大きくなり、波速が大きくなる傾向を有することがわかる。ここで、津波高さは、対象としているモードの、表面波の水面変動の最大値を表わす。そして、 $h_m = 6,000$ m である場合、内部波モードよりも、表面波モードの津波高さが大きい。一方、 h_m がより大きい $h_m = 196,000$ m である場合、表面波モードよりも、内部波モードの津波高さが大きくなっている。

図-4 に、 $B = 3.43 \times 10^{10}$ Nm²、 $\rho_m = 3,300$ kg/m³ 及び $h_m = 196,000$ m とした場合の、時刻 $t = 2,000$ s における水面形 $z = \eta$ 及び海底面形 $z = b + h_w$ の数値解析結果を示す。

また、図-5 に、 $B = 3.43 \times 10^{20}$ Nm²、 $\rho_m = 3,300$ kg/m³ 及び $h_m = 196,000$ m とした場合の、時刻 $t = 2,000$ s における水面形 $z = \eta$ 及び海底面形 $z = b + h_w$ の数値解析結果を示す。

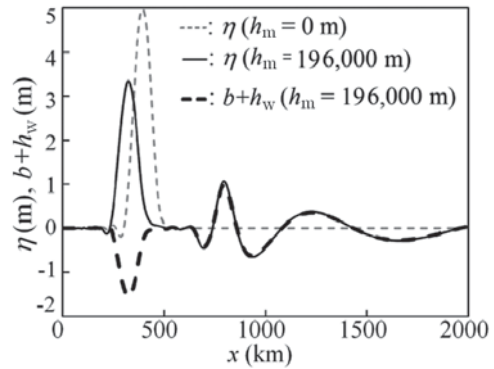


図-4 時刻 $t = 2,000$ s における水面形及び海底面形 ($B = 3.43 \times 10^{10}$ Nm²、 $\rho_m = 3,300$ kg/m³、 $h_m = 196,000$ m)

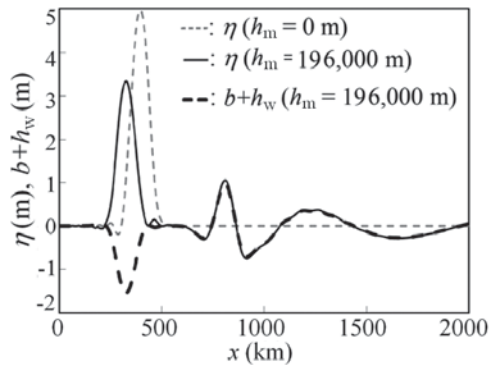


図-5 時刻 $t = 2,000$ s における水面形及び海底面形 ($B = 3.43 \times 10^{20}$ Nm²、 $\rho_m = 3,300$ kg/m³、 $h_m = 196,000$ m)

図-4 の結果と、図-3 に示した、 $B = 0.0$ Nm²、 $\rho_m = 3,300$ kg/m³ 及び $h_m = 196,000$ m の場合の結果を比較すると、両者に差異が殆ど認められず、 $B = 3.43 \times 10^{10}$ Nm² のオーダのプレートの曲げ剛性率は、表面波モード並びに内部波モードの津波高さ及び波速に対して、殆ど影響しないことがわかる。しかしながら、図-5 に示す、曲げ剛性率が更に大きい $B = 3.43 \times 10^{20}$ Nm² の場合、表面波モードの波速に、プレートの弾性体としての運動の影響が現れている。すなわち、表面波モードの峰のピークの波速は、図-4 の $B = 3.43 \times 10^{10}$ Nm² の場合、約 400.0 m/s、図-5 の $B = 3.43 \times 10^{20}$ Nm² の場合、約 404.0 m/s であり、後者の方が、表面波モードの峰のピークの波速

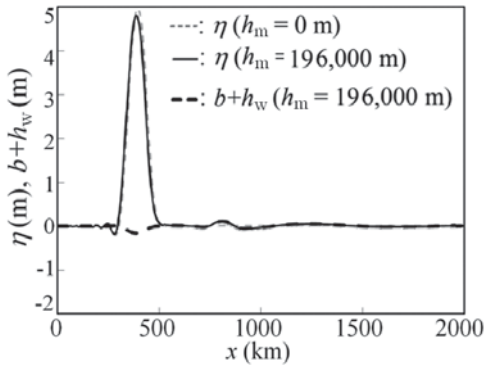


図-6 時刻 $t = 2,000$ s における水面形及び海底面形 ($B = 3.43 \times 10^{10} \text{ Nm}^2$, $\rho_m = 33,000 \text{ kg/m}^3$, $h_m = 196,000 \text{ m}$)

が約 4.0 m/s 大きい。他方、内部波モードに対しては、弾性体の曲げ剛性率の違いの影響は、殆ど認められない。

図-6 に、 $B = 3.43 \times 10^{10} \text{ Nm}^2$, $\rho_m = 33,000 \text{ kg/m}^3$ 及び $h_m = 196,000 \text{ m}$ である場合の結果を示す。

図-6 は、図-4 の場合よりも、マントル上層部の密度 ρ_m が大きい場合の空間波形の結果である。図-4 と図-6 を比較すると、 ρ_m が大きい図-6 の場合、表面波モードの津波高さが著しく低い。他方、内部波モードの津波高さ及び波速は、両者とも、 ρ_m が大きい図-6 の場合に大きい。図-6 において、これらの値は、それぞれ、1層問題における津波高さ及び波速の値に近付いている。

表-1 に、内部波モードの津波高さ η_2 と、表面波モードの津波高さ η_1 の比 η_2 / η_1 の数値解析結果を示す。

表-1 において、 Δt (Chile) は、津波がチリ沿岸域で発生したとき、有意な津波高さの内部波モードの表面波が、波速 $\sqrt{gh_w}$ で進行する1層問題における津波よりも、どれほどの時間遅れて日本に到達するのかを表わす。ただし、チリ沿岸の津波波源から日本までの距離を 17,000 km とし、海水の静水深を 4,000 m で一様としている。また、プレートの曲げ剛性率及び静水状態のマントル上層の深さがともに一様であるとし、プレートの不連続性

を考慮していない。

例えば、図-6 に示された内部波モードの津波は、波速が約 192.0 m/s であり、波速が約 198.0 m/s である1層問題の津波よりも遅れて伝播している。この場合、チリ沿岸域で発生した津波は、1層問題における津波よりも、45分程度遅れて日本に到達することになる。

また、表-1 より、 $\rho_m = 330,000 \text{ kg/m}^3$ である場合、マントル上層の密度がこの程度まで大きいと、マントルの流動性の効果が低減し、内部波モードの津波の波速が1層問題の津波に近付くことがわかる。

このように、マントル上層とプレートの運動に対して、ある条件を仮定した場合、1層問題の津波よりも遅れて伝播する、有意な波高を有する内部波モードの津波が存在する。表-1 に示す場合では、チリ沿岸域で発生した津波が、1層問題における津波よりも30分～1時間30分程度遅れて日本に到達する(気象庁(2010)による。)のは、表の適否の欄に◎, ○, または, △を付した場合である。このうち, △を付した場合には、表面波モードの津波高さが、有意に大きくなる。従って、△を付した場合、1層問題の津波よりも伝播速度が大きい表面波モードの表面波が、津波第1波として観測されるであろう。

また、○を付した場合は、表面波モードの津波高さが、△の場合ほど大きくない。しかしながら、表面波モードの表面波が、津波第1波として観測される可能性がある。

一方、◎を付した場合には、内部波モードの津波高さが、表面波モードのそれよりも顕著に大きい。そして、この場合、1層問題の津波よりも遅れて伝播する内部波モードの表面波が、津波第1波と判断されることになる。表-1 の◎を付した場合において、マントル上層の深さ及び密度は、それぞれ、 $h_m = 196,000 \text{ m}$ 及び $\rho_m = 33,000 \text{ kg/m}^3$ であり、チリ～日本間の1層問題の津波との走時差は、45分程度となっている。

表-1 内部波モードと表面波モードの津波高さの比 η_2/η_1 及びチリ津波が日本に到達する際の走時差 Δt (ここで、 ρ_w , ρ_m , h_w , h_m 及び B は、それぞれ、海水の密度、マントル上層の密度、海水の静水深、静水状態におけるマントル上層の深さ及びプレートの曲げ剛性率であり、 $\rho_w = 1,000 \text{ kg/m}^3$ とし、 h_w が 4,000 m で一様であるとしている。また、走時差 Δt は、チリ沿岸域で津波が発生したとき、有意な津波高さを有する内部波モードの表面波が、波速 $\sqrt{gh_w}$ で進行する 1 層問題における津波よりも、どれほどの時間遅れて日本に到達するのかを表わす。ただし、チリ沿岸の津波波源から日本までの距離を 17,000 km とする。)

$h = h_w + h_m$ (m)	h_m (m)	ρ_m (kg/m^3)	B (Nm^2)	η_2/η_1	Δt (Chile)	図	適否 ^{*)}
5,000	1,000	3,300	0.0	—	—	図-3	××
			3.43E+18	—	—	—	××
10,000	6,000	3,300	0.0	0.54	8h57min	図-3	×
			3.43E+20	0.58	8h57min	—	×
		33,000	0.0	4.9	1h16min	—	△
			3.43E+16	3.9	45min	—	△
			3.43E+20	4.0	45min	—	△
		330,000	0.0	—	15min	—	×
			3.43E+10	—	15min	—	×
		200,000	196,000	3,300	0.0	3.2	4h57min
3.43E+10	3.2				4h57min	図-4	×
3.43E+20	3.2				4h57min	図-5	×
9,900	0.0			12.3	1h49min	—	×
	3.43E+10			12.3	1h49min	—	×
13,200	0.0			16.9	1h16min	—	○
	3.43E+10			18.2	1h16min	—	○
33,000	0.0			43.5	45min	—	◎
	3.43E+10			48.0	45min	図-6	◎
	3.43E+20			48.0	45min	—	◎
330,000	0.0			4.5E+2	15min	—	×
	3.43E+20			4.5E+2	15min	—	×

*) 適否の内容は、次の通りである。

××：内部波モードの津波高さが有意な大きさを持たない。

×：内部波モードの走時差が 30 分～1 時間 30 分の範囲内でない。

△：内部波モードの走時差が 30 分～1 時間 30 分の範囲内にあるが、表面波モードの津波高さが有意に大きい。

○：内部波モードの走時差が 30 分～1 時間 30 分の範囲内にあり、表面波モードの津波高さが △ の場合ほど大きくないが、これが異常潮位と認識される可能性がある。

◎：内部波モードの走時差が 30 分～1 時間 30 分の範囲内にあり、表面波モードの津波高さよりも、内部波モードの津波高さが顕著に大きい。

5. 結 論

海水下にあるプレートが弾性体であり、また、その下方にあるマントル上層が流体のように振る舞うと仮定して、プレートやマントル上層の運動を考慮した津波伝播の数値解析を行なった。その結果、プレート及びマントル上層がある条件を満たす場合、一層問題の津波よりも遅れて伝播する、津波高さが相対的に大きな内部波モードの津波が存在することが見出された。

参考文献

- 1) 柿沼太郎：海面や海中で振動する大規模薄板構造物と相互干渉する表面波及び内部波の非線形数値計算, 海洋開発論文集, 第 17 巻, pp. 181-186, 2001.
- 2) 気象庁：津波シミュレーション結果の分析, 第 6 回津波予測技術に関する勉強会資料 2, 22p., 2010.
- 3) 楠本 聡・綿田辰吾・佐竹健治：遠地津波の観測波形と弾性-流体地球に基づく理論波形の位相速度の比較, 日本地震学会秋季大会講演予稿集, p. 179, 2012.
- 4) 高川智博：水の圧縮性と地殻弾性を考慮した津波の分散関係解析：遠地津波予測の精度向上に向けて, 土木学会論文集 B2 (海岸工学), Vol. 69, No. 2, pp. 426-430, 2013.
- 5) 山下 啓・柿沼太郎・中山恵介：薄板状浮体構造物上を移動する荷重により生成される表面波及び内部波の数値解析, 土木学会論文集 B3 (海洋開発), Vol. 67, No. 2, pp. 160-165, 2011.
- 6) 劉 曉東・堺 茂樹：大型弾性浮体下での孤立波の分裂に関する数値解析, 海岸工学論文集, 第 47 巻, pp. 31-35, 2000.
- 7) 綿田辰吾・佐竹健治・藤井雄士郎：遠地津波走時異常の起源, 日本地震学会秋季大会講演予稿集, p. 137, 2011.
- 8) Inazu, D. and Saito, T.: Simulation of distant tsunami propagation with a radial loading deformation effect, *Earth Planets Space*, Vol. 65, pp. 835-842, 2013.
- 9) Kakinuma, T., Yamashita, K., and Nakayama, K.: Surface and internal waves due to a moving load on a very large floating structure, *J. Applied Mathematics*, Vol. 2012, Article ID 830530, 14 pages, 2012.
- 10) Nakamura, K. and Watanabe, H.: Tsunami forerunner observed in case of the Chile tsunami of 1960, The Chilean tsunami of May 24, 1960, *Earthquake Research Institute, The Univ. of Tokyo*, pp. 82-99, 1961.
- 11) Nakayama, K. and Kakinuma, T.: Internal waves in a two-layer system using fully nonlinear internal-wave equations, *Int. J. Numer. Meth. Fluids*, Vol. 62, pp. 574-590, 2010.
- 12) Takagi, K.: Interaction between solitary wave and floating elastic plate, *J. Waterway, Port, Coastal, and Ocean Eng., ASCE*, Vol. 123, pp. 57-62, 1997.