

不等流を遡上する波状性を有する長波に関する水理実験とその数値計算

安田 浩保 *

1. はじめに

波状段波に関する研究は、静水場においてゲートの急閉などにより段波を生じさせた場合について、Favre¹⁾, Keulegan&Patterson²⁾, Johnson^{3) 4)}, Peregrine⁵⁾, 室田⁶⁾や松富⁷⁾などが実施している。これらの研究によると、波頭部では局所的な水位上昇を生じる波状段波が形成され、入射時の水位に比して 2 倍程度にまで水位が急激に上昇することが指摘されている。ただし、このような波状段波が流れ場を遡る場合の議論にまでは至っていない。一方で、流れ場を遡る波動に関する理論解析を佐藤⁸⁾などが実施している。しかし、過去に行われたいずれの理論解析ともに静水圧近似のもとで行われており、波状段波の形成に伴う水位上昇までは言及されていない。最近になり、安田ら⁹⁾は、ゲートが急閉された場合に生じる波状段波が疑似等流場を遡上する問題に関する水理実験を実施し、波頭部における波状性に伴う水位上昇の規模は 1.8 倍程度にまで達することを示した。

同現象の工学的な応用事例のひとつとして津波の河川遡上が挙げられよう。2003 年 9 月に発生した十勝沖地震津波の複数の河川への浸入と波状段波が形成されたことを契機に津波の河川遡上の危険性が認識されるようになった¹⁰⁾。しかし、前述までの通り、流下方向に Fr 数が漸変する不等流場における検討は不十分と言わざるを得ない状況にある。また、急勾配河川などの高 Fr 数の条件下における長波の変形に関する知見は乏しい。

本研究では、このような実情を踏まえ、その第一段階として、不等流場を遡る波状段波

に関する水理実験を実施してその形成に伴う水位上昇の規模を把握するとともに、同現象に関する 1 次元数値計算法について検討した。

2. 水理実験

(1) 実験装置の概要

本研究で使用した実験装置は、図-1 に示した全長 34m, 全幅 0.5m の矩形断面水路である。下流端から 6m の区間は固定勾配区間、そこから 28m の区間は水平から 1/50 まで無段階に水路勾配を変化させることができる。ただし、上流端から約 2m の区間には整流のための緩衝材を配置した。水路の上流端に最大給水能力が 80l/s の給水機構と下流の固定勾配区間に排水機構を備え、不等流場が形成できるようになっている。固定勾配区間には最長周期 10 秒、造波可能最大水深 0.8m のコンピュータ制御のパドル型造波機を備えている。水位変化の計測は、図-1 のとおり配置された容量式波高計（ケネック製）を用いた。計測時間間隔は 0.02 秒を設定した。

(2) 実験条件実験

条件は、表-1 に示す 15 通りを設定した。不等流場は、河床勾配 i に 1/250, 1/750 の二つを設定し、この河床勾配に対して下流端水深 D_M に 0.30, 0.35, 0.40m の 3 つと表-1 に

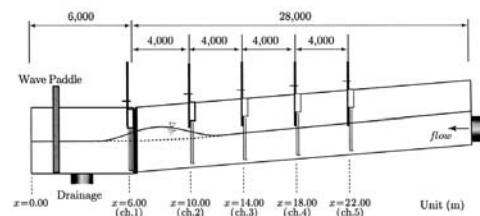


図-1 実験装置の概要

* 独立行政法人土木研究所寒地土木研究所
寒地河川チーム

表-1 実験条件の一覧

Run	i	D_M (m)	q (m ³ /s)	Fr_M	H_T (m)	T_T (s)
1	250	0.30	0.074	0.29	0.05	5.0
2		0.35	0.074	0.23		
3		0.40	0.074	0.19		
4		0.40	0.060	0.15		
5		0.40	0.040	0.10		
6		0.40	0.020	0.05		
7		0.30	0.000	0.00		
8		0.35	0.000	0.00		
9		0.40	0.000	0.00		
10	750	0.30	0.043	0.17		
11		0.35	0.043	0.13		
12		0.40	0.043	0.11		
13		0.30	0.000	0.00		
14		0.35	0.000	0.00		
15		0.40	0.000	0.00		

示した流量 q を組み合わせて形成している。また、入射波が流れから受ける影響を相対的に把握することを目的に静水時の実験も併せて実施した。

ゲート急開などによる造波では波形の再現性の保持や制御が難しいため、下流端から入射する波の造波には図-1内のパドル型造波機を用いた。入射波の波形は \sin^2 の上に凸の半周期の孤立波型とし、この波形の目標最大

波高 H_T を 0.05m、周期 T_T を 5 秒とした。なお、本文における周期の定義は、定常流水位が一度隆起し再び定常水位に戻るまでの時間を意味する。

今回の実験における Manning の粗度係数は 0.020 ~ 0.022 である。これは各流量毎に縦断方向に 4m 間隔で 4 点の定常水位をポイントゲージで計測し、これらの縦断水位分布がそれぞれ再現できるよう Manning の粗度係数を変化させる不等流計算を行い推定したものである。なお、水路底面の材質は敷設された人工芝である。

(3) 実験結果

実験結果のうち、時間波形としてとりまとめたもの一例が図-2 ~ 4、各計測地点における水位上昇率と初期水深および Fr 数に着目して整理したものがそれぞれ図-5, 6 である。なお、碎波の発生については入射波の遡上を目視で追跡して確認した。その結果、全実験条件ともにいずれの計測地点においても碎波の兆候は全く見られなかった。

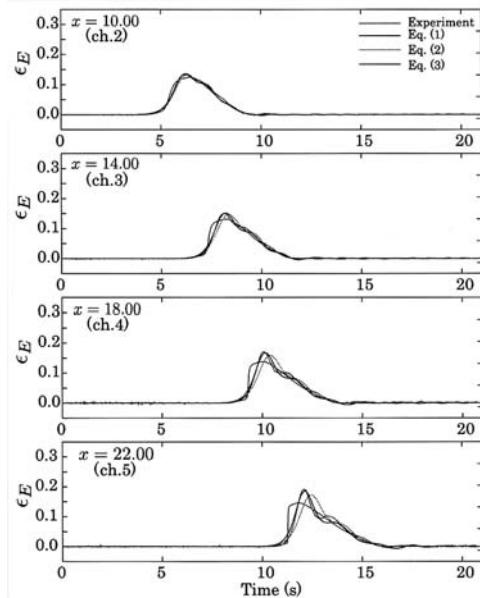


図-2 水理実験と数値解析による再現計算結果の時間波形図

(Run-9 : $i=1/250$, $q=0.0$, $D_M=0.40$)

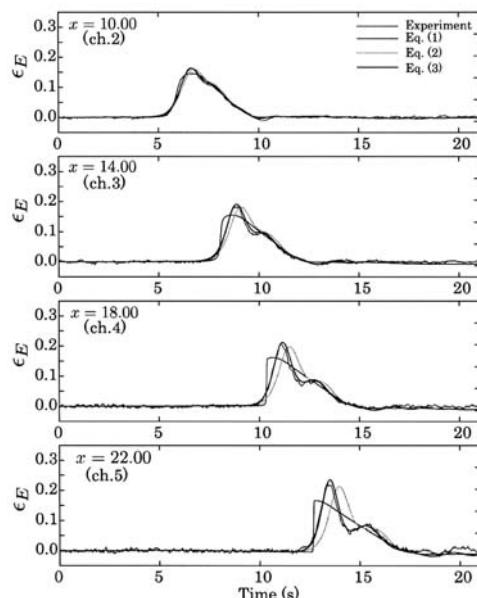


図-3 水理実験と数値解析による再現計算結果の時間波形図

(Run-4 : $i=1/250$, $q=0.060$, $D_M=0.40$)

a) 時間波形の特性

まず、入射波の遡上に伴う波形の変形であるが、実施したいずれの実験条件とともに不等流場を遡る過程において明瞭に波形が変形して、1つの波峰が2つ以上に分裂するいわゆる波数分散現象が生じた。この現象が主な原因となり入射波の波高は上昇する。図-2～4は順に流れが強くなっている。入射時に一山だった \sin^2 波は少なくとも二つ波峰を生成していることが分かる。しかも、流れが強いほどに波峰間距離は長くなる。つぎに、入射波の遡上速度であるが、流れの影響を受けて低下する。紙面の都合で詳細は割愛するが、波速の低下は流れの影響だけでなく、分散波列の形成からも少なからず影響を受けていた。

b) 波状段波への遷移に伴う水位上昇率

一般に浅水波に分類される波動現象では伝播過程において浅水変形により波高、波形がともに変化する。また、流れ場中の波動は流れの有無により波形の変形量や変形速度が大きく異なる。そこで、各地点の水位上昇率と $H_T/D(0, x)$ 、および Fr 数との関係を

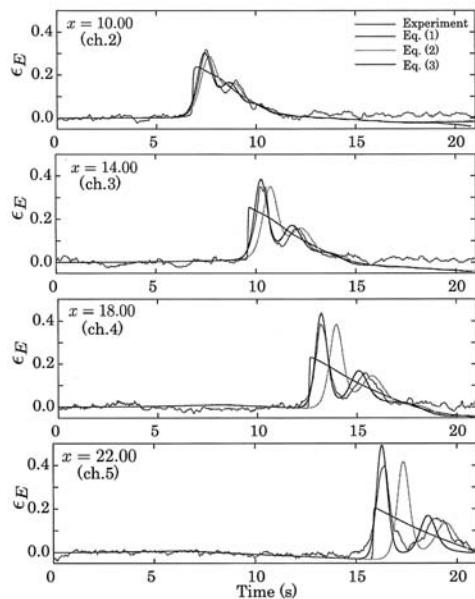


図-4 水理実験と数値解析による再現計算結果の時間波形図

(Run-1 : $i=1/250$, $q=0.074$, $D_M=0.30$)

図-5a), b) と図-6に示すとおり調べた。図-5a), b) はそれぞれ水路床勾配を $1/250$, $1/750$ としたもので、同図中の赤、青で流量の有無を分類し、赤が流量なしの $q=0.0$ 、青が流量ありの $q=0.043$, 0.074 の場合の結果である。また、プロットマークは $x=6.0 \sim 22.0$ の計測値を順に繋ぎ、その変化過程を把握できるようにしている。一方で、図-6は各計測地点の初期水深に対する $Fr(x, 0)$ と水位上昇率との関係を示している。これらの図における水位上昇率は $H_M(x)/H_T$ として求めた。ここで、 $H_M(x)$ は $\eta_M(x, t) - \eta(x, 0)$ として算出された計測時間内における各計測地点の水位の最大変化量である。なお、同じ下流端水

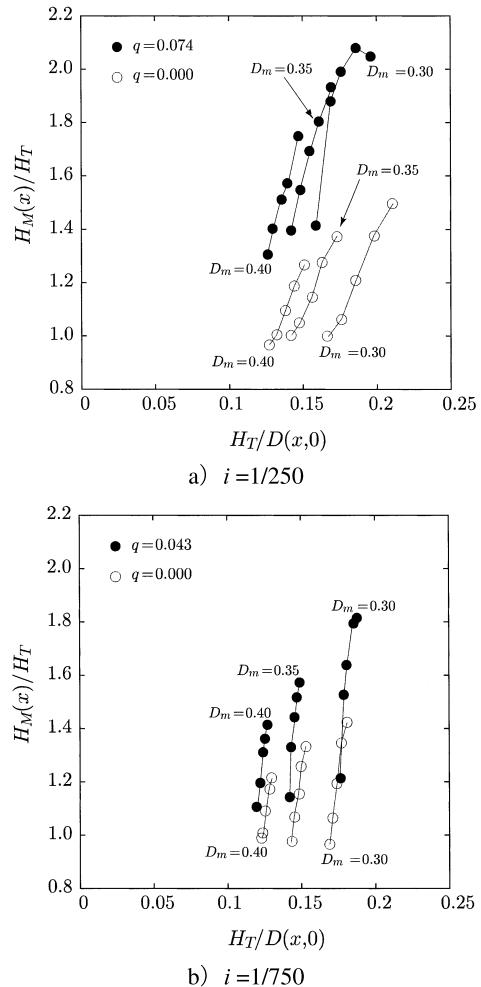
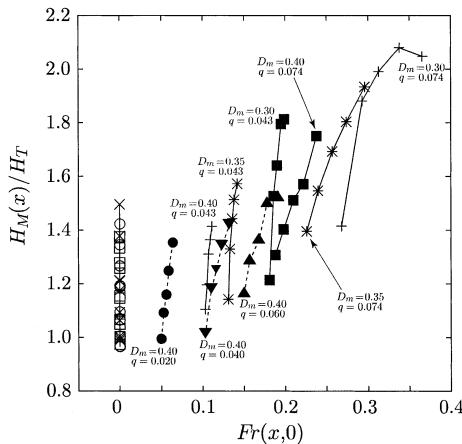


図-5 無次元初期水深に着目した水位上昇率

図-6 Fr 数に着目した水位上昇率

位 D_m にもかかわらず、流量の有無により一点目の $x=6.0$ の値が異なるのは造波地点からここまでに波形が変形したためである。

これらの図のとおり、流量が無い場合における水位上昇率は少なくとも 1.2 度、流量がある場合では少なくとも 1.4 度、最大では 2.0 度にまで達していたことが分かった。これらの結果は、浅水変形と波数分散現象の両者の重複によりもたらさせているものと考えられる。また、流れがある場合では、より短い週上距離の間に水位上昇率が大きく変化し、 Fr 数が 0.35 度、初期波高水深 0.15 度の水理条件ですら入射波高が 2 倍程度にまで達する可能性があることが示された。

なお、発達から減衰に至る経過を捉えられたのは図-4 に示した Run-1 だけであった。他の条件は発達過程のみを捉えたものである。本研究で対象とする波動現象の波高は流れの影響を受けて減衰が生じることがあるため、特にこれに着目した水理実験を本稿のとりまとめ後に実施した。詳細については稿を改めて報告する予定である。

3. 波状段波の数理モデル

(1) 支配方程式

段波の波頭部で見られる波状性は、水面の

曲率が大きくなり生じた重力加速度に影響を及ぼす規模の鉛直方向加速度がもたらすものである。このため、河川流の解析に頻用される静水圧を仮定して導かれる、

$$\frac{\partial M}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{M^2}{D} \right] + gD \frac{\partial \eta}{\partial x} = -\frac{\tau_0}{\rho} \quad (1)$$

と書かれる浅水理論は、同現象を理論的に正確に記述をすることができない。ここに、 M は流量フラックス、 t は時間座標、 x は流下方向座標、 D は水深、 g は重力加速度、 h は定常水深、 η は水位である。この理論式に対して staggered 格子を用いた数値計算では波頭部に高波数成分が顕れる。これは打ち切り誤差によるもので、波状性を伴う段波の波高や波速とともに物理的に正しく評価することができない。

これに対して、浅水理論に鉛直方向加速度の影響を近似的に考慮した Boussinesq 系方程式がある。これまでにいわる修正 Boussinesq 方程式と呼ばれる方程式が数多く提案^{11) 12) 13) 14)} などされている。波状性段波の解析では支配方程式にこのような Boussinesq 系方程式を適用する必要がある。安田らはゲート急閉に伴い生じる波状段波の解析にあたり、積分型の Peregrine の式¹¹⁾

$$\frac{\partial M}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{M^2}{D} \right] + gh \frac{\partial \eta}{\partial x} = \frac{h^2}{3} \frac{\partial^3 M}{\partial t \partial x^2} - \frac{\tau_0}{\rho} \quad (2)$$

を用いることで、実用上十分な精度が得られることを示している。なお、Peregrine の式には河床勾配に関する微分項が本来含まれているが、1/20 よりも水底勾配が緩やかに場合ではその寄与度が小さいとされている。このため、本研究でも無視している。

式 (2) は Ur 数が小さい場合として導出されているため、有限振幅性が著しい場合は波高、波速ともに精度が低下する。これに対して、後藤¹²⁾は Ur 数が大きい場合、すなわち有限振幅性が無視できない場合の方程式を提案している。この方程式では、式 (2) と比べて、分散項に高次の非線形項が含まれているが、これらの非線形項を無視すると、

$$\frac{\partial M}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{M^2}{D} \right] + gD \frac{\partial \eta}{\partial x} = \frac{D^2}{3} \frac{\partial^3 M}{\partial t \partial x^2} - \frac{\tau_0}{\rho} \quad (3)$$

簡便化された後藤の式を得る。連続の式は、いずれの運動の式に対しても

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{\partial M}{\partial x} = 0 \quad (4)$$

である。次章において、これらの式に基づく再現計算を実施し、その妥当性について検証する。

(2) 数値解析法

前述の方程式のうち、式(2)、式(3)の Boussinesq 系方程式の数値解析法には、計算精度と計算効率の両立および多次元解析への拡張が容易な差分スキームである 2 段階混合差分¹⁵⁾を適用した。移流項の計算は、2 次精度中央差分、3 次精度風上差分のそれぞれで行った。一方で、式(1)の数値計算は staggered Leap-frog と 1 次精度風上差分で行った。ただし、この計算法では段波の波頭部において高周波成分が発生し、式(2)、式(3)との波高比較などが困難となる。このため、この高周波成分の除去を目的とした 4 階の人工粘性項を導入している。この人工粘性項の粘性係数は、高周波成分の除去にのみ作用するように試行錯誤で選定した。

4. 水理実験の再現計算

(1) 初期条件、境界条件

初期条件は、水位分布を与えるものとし、上流端からの流量の供給がある場合には不等流計算を実施して縦断的な水位分布を定めた。

境界条件は、上流端境界条件として流量の供給がある場合には定常流量を与え、下流端境界条件は $x=6.00$ の計測波形を強制入射として与えている。

空間格子間隔 Δx 、時間格子間隔 Δt はそれぞれ 0.10m、0.001 秒とした。

なお、数値計算は 1 つの実験条件に対し、

式(1)と式(1)に前述の人工粘性を考慮した場合、式(2)、式(3)をそれぞれ 2 次精度中央差分、3 次精度風上差分で計算した場合の合計 6 パターンを実施している。計算結果の比較をしたところ、式(1)の計算に関しては波頭部での高周波成分のみが適切に除去できていること、式(2)、式(3)の計算のいずれにおいても 2 次精度中央差分と 3 次精度風上差分では最大水位や段波の到達時間において差異はほとんど無いことが確認された。このため、図-2～4 では人工粘性を考慮した式(1)、3 次精度風上差分を適用した式(2)、式(3)の計算結果のみを掲載した。

(2) 計算結果

3 つの実験条件における実験値と計算値を時間波形として比較したものが図-2～4 である。第一波峰は式(3)を適用した場合、かなりの精度で計算できることが分かる。一方で、第二波峰に関しては波高、移動速度ともに十分に再現できないことが多かった。

実施したすべての水理実験と数値解析における最大波高と波峰移動速度の比較を図-7、図-8 にとりまとめた。図-7、図-8 では、実験条件毎に $x=6.0 \sim 22.0$ 地点の値が左から右の順に連ねられている。青線が 1/250、赤線が 1/750 の値を示している。

まず、最大波高に関しては図-7 から分かることおり、同図 a) に示した浅水理論の計算値はすべての計算条件で過小評価となることが分かる。この図から浅水変形の効果が計算されていることを見て取ることができるが、本研究において実施した水理実験はいずれも浅水変形だけでは説明できない水位上昇であったことが同図から理解できる。鉛直方向加速度を導入した式による計算値は、同図 b)、c) に示したとおりいずれともかなり良好な精度で実験を再現することができるものの、同図 b) の式(2)の計算値は、若干ながら全体的に過小評価となる傾向がある。これに対し、同図 c) の式(3)の計算値はこの過小評価の傾向を全体にわたり改善できることが示された。ただし、図-4 の条件に関

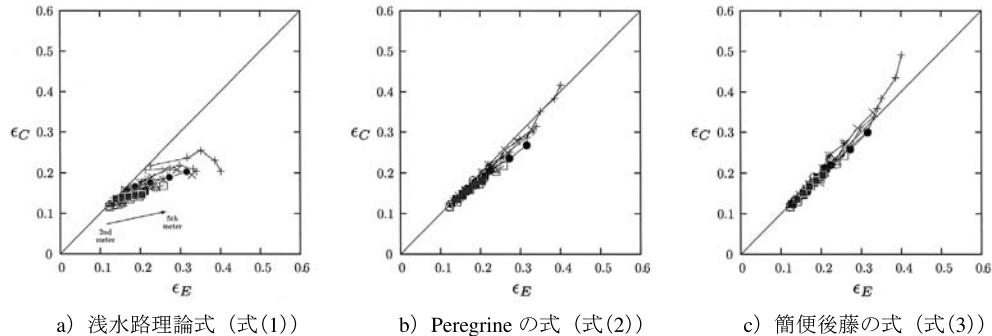


図-7 実験値と計算値の最大波高の比較

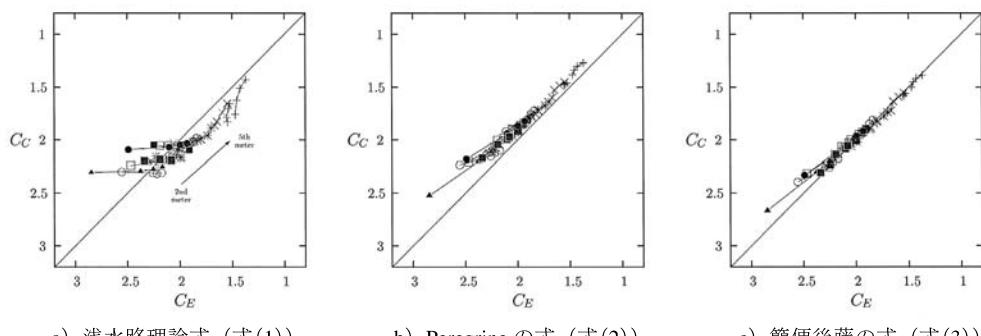


図-8 実験値と計算値の波峰移動速度の比較

しては伝播するに従い実験値と計算値の差異が拡大する結果となった。

つぎに波峰の移動速度については図-8 のとおりからはから分かるようにやはり鉛直方向加速度を導入した式では実験値を良好に再現できる。これらの波峰の移動速度は C_E , $C_C = \Delta x_M^n / (t_p^n - t_p^0)$ として求めた。ここで、 C_E , C_C は実験値と計算値の波峰の移動速度, Δx_M^n は Ch-1 の波高計から n 番目の波高計までの距離, t_p^n は n -th の波高計の設置地点を波峰が通過した時刻である。同図 a) に示されたとおり、浅水理論による計算値はいずれの実験条件においても全体的な傾向として早くなる結果が示された。このことは、実験値は波数分散現象の発生に伴う波速の低下が生じている一方、浅水理論の計算値ではこの物理機構が考慮されていないためであることから理解できる。同図 b) に示した Peregrine

の式による計算値は概ね良好であるものの、有限振幅性が考慮されていないことが原因となり、遅れ気味となった。同図 c) に示した簡便後藤の式による計算値は一致しない実験条件を残しつつも全体的に精度が向上していることが分かる。

(3) 解析結果に基づく波状段波の考察

今回実施した水理実験において計測された波状段波の水位上昇は、浅水変形に基づくものと波数分散現象に伴う鉛直方向加速度の増大の両者が原因となっていると考えられる。このため、今度の検討の余地が残されているものの、波状性を伴う波動の解析においては少なくとも対象とする現象の波高水深比に応じた Boussinesq 系方程式が不可欠であると言える。

5. おわりに

本研究により得られた結論は以下の通りである。

波状段波に関する水理実験を実施した結果, 20m 程度の計測区間の範囲ですら, その最大水位変化量は, 流れのない静水中においておよそ 1.4 倍, 流れがある場合ではおよそ 2 倍程度まで増加することが明らかになった。

これらの実験の再現計算を 1 次元解析により行ったところ, 通常の河川流の解析に適用される浅水流の式では波高は過小に, 波速は過大に評価されることが示された。これに対して, 鉛直方向加速度を導入した浅水理論式では波高, 波速ともに良好に再現できることが分かった。つまり, 波状性を伴う波動の解析においては少なくとも対象とする現象の波高水深比に応じた Boussinesq 系方程式が不可欠であると言える。これは, 実際的な津波の河川遡上の問題において言うなら, 解析対象となる河川の平均的な水深と想定される津波の最大入射波高から採用すべき支配方程式を選択することを意味している。

謝辞：本研究は, 国土交通省北海道開発局, 北海道河川防災研究センターからの支援を受けて実施されている。また, 水理実験にあたっては岩手大学若松明史君, 児玉烈君, 橋本尚棋君の助力を得た。ここに記して謝意を表します。

参考文献

- 1) Favre,H. : Etude theorique et experimental des ondes de translation dans les canaux decouverts. Dunod, p.150.,1935.
- 2) Keulegan, G.H. and Patterson, G.W. : Mathematical theory of irrotational translation waves, *J. Res. Nat. Bur. Standards.*, Vol.24, pp. 47–101, 1940.
- 3) Johnson, R.S. : A non-linear equation incorporating damping and dispersion, *J. Fluid Mech.*, Vol.42, pp. 49–60, 1970.
- 4) Johnson, R.S. : Shallow Water Waves on a Viscous Fluid – The Undular Bore, *Phys. Fluids*, Vol.15, No.10, pp.1693–1699, 1972.
- 5) Peregrine, D.H. : Calculations of the development of an undular bore, *J. Fluid Mech.*, Vol.25, pp.321–330, 1966.
- 6) 室田明, 岩田好一朗 : 段波の変形に関する研究, 土木学会論文集, 第 160 号, pp.49–58, 1971.
- 7) 松富英夫 : 移動跳水 (波状段波非) 発生条件の検討, 第 33 回水理講演会論文集, pp.271–276, 1989.
- 8) 佐藤道郎 : 不等流を遡る波の波高変化に関する基礎的研究, 土木学会論文報告集, 第 242 号, pp.15–29, 1975.
- 9) 安田浩保, 山田正, 後藤智明 : スルースゲートの閉鎖に伴い発生する段波の水理実験とその数値計算, 土木学会論文集, No.733/II-63, pp.89–105, 2003.
- 10) 安田浩保, 渡邊康玄, 藤間功司 : 2003 年 9 月の十勝沖地震に伴い発生した津波の河川遡上, 土木学会論文集, No.768/II-68, pp.209–218, 2004.
- 11) Peregrine, D.H. : Longwavesonabeach, *J. Fluid Mech.*, Vol.27, pp.815–827, 1967.
- 12) 後藤智明 : アーセル数が大きい場合の非線形分散波の方程式, 土木学会論文集, 第 351 号, pp.193–201, 1984.
- 13) Madsen, P.A. and Sørensen, O.R. : A new form of the Boussinesq equations with improved linear dispertion characteristics, Part 2, A slowly-varying Bathymetry, *Coastal Eng.*, Vol.18, pp.183–204, 1992.
- 14) Beji, S. and Nadaoka, K. : A formal derivation and numerical modelling of the improved Boussinesq equations for varying depth, *Ocean Eng.*, Vol.23, pp.691–704, 1996.
- 15) たとえば, 後藤智明 : 2 段階混合差分法を用いた線形分散波方程式の数値計算における打ち切り誤差, 津波工学研究報告, 第 20 号, pp.13–22, 2003.