

線形分散波理論数値モデルの安定条件および誤差について

鳴原 良典*・藤間 功司*

1. はじめに

現在、我が国における津波の被害推定は近地津波を想定した日本沿岸に対する予測が主であり、その場合、支配方程式として線形長波理論式がしばしば利用される。しかしながら、遠地津波のように深海域を長距離（千 km 以上）伝播する場合、波数分散現象を考慮した線形分散波理論式を支配方程式として選ぶ必要がある。これは、断層運動によって発生した津波の初期波形が長周期成分と短周期成分を含んだ波が幾重にも重ね合わさったものであるため、伝播する過程において、津波の全体的なエネルギーは変化することなく短周期成分が遅れていくことで波に位相差が生じるためである。このような効果は津波第 1 波の水位減衰や波長の伸長、分散波列の生成として現れ、沿岸域での共振特性など津波の增幅現象や、津波の継続時間に影響を及ぼす。

これまで線形分散波理論の数値モデルは数多く提案され、その有用性について議論されている。しかしながら、数値計算を行う上で

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{\partial M}{\partial x} + \frac{\partial N}{\partial y} = 0 \quad (1)$$

$$\frac{\partial M}{\partial t} + c_0^2 \frac{\partial \eta}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left[\alpha_x h^2 \frac{\partial^2 M}{\partial x \partial t} + \beta_x h^2 \frac{\partial^2 N}{\partial y \partial t} + \gamma_x c_0^2 h^2 \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} + \delta_x c_0^2 h^2 \frac{\partial^2 \eta}{\partial y^2} \right] \quad (2)$$

$$\frac{\partial N}{\partial t} + c_0^2 \frac{\partial \eta}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left[\alpha_y h^2 \frac{\partial^2 N}{\partial y \partial t} + \beta_y h^2 \frac{\partial^2 M}{\partial x \partial t} + \gamma_y c_0^2 h^2 \frac{\partial^2 \eta}{\partial y^2} + \delta_y c_0^2 h^2 \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} \right] \quad (3)$$

ここで、 η は水位、 M, N は x, y 方向の線流量、 c_0 は線形長波の波速 ($= \sqrt{gh}$, h : 静水深), g は重力加速度である。上記の式に

考慮しなければならない数値モデルの安定条件に関する議論は必ずしもされておらず、試行錯誤的に行われているのが現状である。また、この安定条件の範囲内における理論解との数値誤差に関する議論も不十分である。これらは実用計算を行う際に、使用する数値モデルの選択や空間・時間格子間隔の設定など、数値計算の諸条件を決定するのに特に重要な要素となる。

そこで本稿では、これまでに提案されてきた 2 次元問題における線形分散波数値モデルについて、差分方程式の厳密解から安定条件および理論解との数値誤差を、各々の数値モデルについて整理し比較する。そして、線形分散波数値モデルの平面 2 次元問題を計算対象とした場合の適用範囲について検討する。

2. 線形分散波理論の数値モデル

2.1 支配方程式

以下に、線形分散波理論の支配方程式を示す。

対する表-1 の分散項中の係数により、現在までに津波数値解析に提案されている線形分散波モデルが表現できる。すなわち、(A) は線形ブシネスク式、(B) が線形 Madsen & Sorensen 式に該当し、(C), (D) はそれぞれ線

*防衛大学校システム工学群建設環境工学科

形ブシネスク式、線形 Madsen & Sorensen 式に対して佐山らによる打ち切り誤差の補正を施した高精度計算法、(E) は陽的な線形ブシネスク式である。ここで、 $K_x = c_0 \Delta t / \Delta x$ ， $K_y = c_0 \Delta t / \Delta y$ ， $H_x = h / \Delta x$ ， $H_y = h / \Delta y$ である。なお、 $(\Delta x, \Delta y, \Delta t)$ はそれぞれ (x,y,t) 軸方向の差分格子間隔である。

2.2 支配方程式の差分化

前節で示した方程式を Staggered Leap-Frog 法によって差分化する。津波数値計算のための線形分散波理論の計算方法は、以下の 3 種類に分類できる。

(a) Leap-Frog 陰解法 (2/3 陰解法)：佐山ら (1987)，後藤ら (1988) などが採用した手法であり、運動の式において x, y 方向の分散項を全て陰的に差分化するため、これらを連立して同時に解く必要がある。

$$\begin{aligned} & [\eta_{j,l}^{n+1/2} - \eta_{j,l}^{n-1/2}] + \lambda_x [M_{j+1/2,l}^n - M_{j-1/2,l}^n] + \lambda_y [N_{j,l+1/2}^n - N_{j,l-1/2}^n] = 0 \quad (4) \\ & [M_{j+1/2,l}^{n+1} - M_{j-1/2,l}^n] + c_0^2 \lambda_x [\eta_{j+1,l}^{n+1/2} - \eta_{j,l}^{n+1/2}] \\ & = \alpha_x H_x^2 [(M_{j+3/2,l}^{n+1} - 2M_{j+1/2,l}^{n+1} + M_{j-1/2,l}^{n+1}) - (M_{j+3/2,l}^n - 2M_{j+1/2,l}^n + M_{j-1/2,l}^n)] \\ & + \beta_x H_x H_y [(N_{j+1,l+1/2}^{n+1} - N_{j+1,l-1/2}^{n+1} - N_{j,l+1/2}^{n+1} + N_{j,l-1/2}^{n+1}) - (N_{j+1,l+1/2}^n - N_{j+1,l-1/2}^n - N_{j,l+1/2}^n + N_{j,l-1/2}^n)] \\ & + \gamma_x c_0^2 \lambda_x H_x^2 [\eta_{j+2,l}^{n+1/2} - 3\eta_{j+1,l}^{n+1/2} - 3\eta_{j,l}^{n+1/2} + \eta_{j-1,l}^{n+1/2}] \\ & + \gamma_y c_0^2 \lambda_y H_y^2 [(\eta_{j+1,l+1}^{n+1/2} - 2\eta_{j+1,l}^{n+1/2} + \eta_{j+1,l-1}^{n+1/2}) - (\eta_{j,l+1}^{n+1/2} - 2\eta_{j,l}^{n+1/2} + \eta_{j,l-1}^{n+1/2})] \quad (5) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & [N_{j,l+1/2}^{n+1} - N_{j,l-1/2}^n] + c_0^2 \lambda_y [\eta_{j,l+1}^{n+1/2} - \eta_{j,l}^{n+1/2}] \\ & = \alpha_y H_y^2 [(N_{j,l+3/2}^{n+1} - 2N_{j,l+1/2}^{n+1} + N_{j,l-1/2}^{n+1}) - (N_{j,l+3/2}^n - 2N_{j,l+1/2}^n + N_{j,l-1/2}^n)] \\ & + \beta_y H_x H_y [(M_{j+1/2,l+1}^{n+1} - M_{j-1/2,l+1}^{n+1} - M_{j+1/2,l}^{n+1} + M_{j-1/2,l}^{n+1}) - (M_{j+1/2,l+1}^n - M_{j-1/2,l+1}^n - M_{j+1/2,l}^n + M_{j-1/2,l}^n)] \\ & + \gamma_y c_0^2 \lambda_y H_y^2 [\eta_{j,l+2}^{n+1/2} - 3\eta_{j,l+1}^{n+1/2} - 3\eta_{j,l}^{n+1/2} + \eta_{j,l-1}^{n+1/2}] \\ & + \gamma_x c_0^2 \lambda_x H_x^2 [(\eta_{j+1,l+1}^{n+1/2} - 2\eta_{j+1,l}^{n+1/2} + \eta_{j+1,l-1}^{n+1/2}) - (\eta_{j,l+1}^{n+1/2} - 2\eta_{j,l}^{n+1/2} + \eta_{j,l-1}^{n+1/2})] \quad (6) \end{aligned}$$

ここで、 $\lambda_x = \Delta t / \Delta x$ ， $\lambda_y = \Delta t / \Delta y$ であり、(j,l,n) はそれぞれ (x,y,t) 軸方向の格子点番号を意味し、 $\alpha_x = \alpha_y = \beta_x = \beta_y = 0$ の場合陽解法となる。さらに、式中の空間差分 $[f_{i+1} - f_i]$ を $(1/24)[27(f_{i+1} - f_i) - (f_{i+2} - f_{i-1})]$ と置き換えることで 4 次精度中心差分になり、圧力項

(b) 2 段階混合差分法 (1/3 陰解法)：岩瀬ら (1988) によって提案された手法で、運動の式において 1 段目は線形長波と見なした計算を行い、2 段目で分散項による補正を行う。2 段目において、それぞれ計算方法の微分のみを陰的に差分化するため x 方向、y 方向を別々に解く事ができ、連立方程式は 3 行対角行列になる。そのため演算時間も比較的短い。

(c) Leap-Frog 陽解法 (陽解法)：線形長波の近似によって分散項中の時間微分を水位の空間微分に置き換えることで陽的に解く方法である (モデル (E))。また Yoon(2002) の擬似格子を仮定した差分式や、 $\Delta x \neq \Delta y$ の場合に適用可能な鳴原ら (2003) による Variable Grid スキーム (モデル (F)) がある。

以下に差分方程式を示す。

・ 2/3 陰解法および陽解法

を中心差分する際に含まれる数値分散誤差を除去する事が出来る (鳴原, 2004; Kowalik, 2003)。以下、本文中における 2 次精度および 4 次精度は、圧力項に対する中心差分を意味するものとする。

・ 1/3 陰解法

$$[\eta_{j,l}^{n+1/2} - \eta_{j,l}^{n-1/2}] + \lambda_x [M_{j+1/2,l}^n - M_{j-1/2,l}^n] + \lambda_y [N_{j,l+1/2}^n - N_{j,l-1/2}^n] = 0 \quad (7)$$

$$[M_{j+1/2,l}^* - M_{j+1/2,l}^n] + c_0^2 \lambda_x [\eta_{j+1,l}^{n+1/2} - \eta_{j,l}^{n-1/2}] = 0 \quad (8)$$

$$[N_{j,l+1/2}^* - N_{j,l-1/2}^n] + c_0^2 \lambda_y [\eta_{j,l+1}^{n+1/2} - \eta_{j,l}^{n-1/2}] = 0 \quad (9)$$

$$\begin{aligned} & [M_{j+1/2,l}^{n+1} - M_{j-1/2,l}^*] = \alpha_x H_x^2 [(M_{j+3/2,l}^{n+1} - 2M_{j+1/2,l}^{n+1} + M_{j-1/2,l}^{n+1}) - (M_{j+3/2,l}^n - 2M_{j+1/2,l}^n + M_{j-1/2,l}^n)] \\ & + \beta_x H_x H_y [(N_{j+1,l+1/2}^* - N_{j+1,l-1/2}^* - N_{j,l+1/2}^* + N_{j,l-1/2}^*) - (N_{j+1,l+1/2}^n - N_{j+1,l-1/2}^n - N_{j,l+1/2}^n + N_{j,l-1/2}^n)] \\ & + \gamma_x c_0^2 \lambda_x H_x^2 [\eta_{j+2,l}^{n+1/2} - 3\eta_{j+1,l}^{n+1/2} - 3\eta_{j,l}^{n+1/2} + \eta_{j-1,l}^{n+1/2}] \\ & + \gamma_y c_0^2 \lambda_y H_y^2 [(\eta_{j+1,l+1}^{n+1/2} - 2\eta_{j+1,l}^{n+1/2} + \eta_{j+1,l-1}^{n+1/2}) - (\eta_{j,l+1}^{n+1/2} - 2\eta_{j,l}^{n+1/2} + \eta_{j,l-1}^{n+1/2})] \end{aligned} \quad (10)$$

$$\begin{aligned} & [N_{j,l+1/2}^{n+1} - N_{j,l-1/2}^*] = \alpha_y H_y^2 [(N_{j,l+3/2}^{n+1} - 2N_{j,l+1/2}^{n+1} + N_{j,l-1/2}^{n+1}) - (N_{j,l+3/2}^n - 2N_{j,l+1/2}^n + N_{j,l-1/2}^n)] \\ & + \beta_y H_x H_y [(M_{j+1/2,l+1}^* - M_{j-1/2,l+1}^* - M_{j+1/2,l}^* + M_{j-1/2,l}^*) - (M_{j+1/2,l+1}^n - M_{j-1/2,l+1}^n - M_{j+1/2,l}^n + M_{j-1/2,l}^n)] \\ & + \gamma_y c_0^2 \lambda_y H_y^2 [\eta_{j,l+2}^{n+1/2} - 3\eta_{j,l+1}^{n+1/2} - 3\eta_{j,l}^{n+1/2} + \eta_{j,l-1}^{n+1/2}] \\ & + \gamma_x c_0^2 \lambda_x H_x^2 [(\eta_{j+1,l+1}^{n+1/2} - 2\eta_{j+1,l}^{n+1/2} + \eta_{j+1,l-1}^{n+1/2}) - (\eta_{j,l+1}^{n+1/2} - 2\eta_{j,l}^{n+1/2} + \eta_{j,l-1}^{n+1/2})] \end{aligned} \quad (11)$$

・ Variable Grid スキーム

$$[\eta_{j,l}^{n+1/2} - \eta_{j,l}^{n-1/2}] + \lambda_x \langle\langle M_{j+1/2,l}^n - M_{j-1/2,l}^n \rangle\rangle + \lambda_y \langle\langle N_{j,l+1/2}^n - N_{j,l-1/2}^n \rangle\rangle = 0 \quad (12)$$

$$[M_{j+1/2,l}^{n+1} - M_{j+1/2,l}^n] + c_0^2 \lambda_x [(1-2b) \langle\langle \eta_{j+1,l}^{n+1/2} - \eta_{j,l}^{n+1/2} \rangle\rangle + b \langle\langle \eta_{j+1,l+1}^{n+1/2} - \eta_{j,l+1}^{n+1/2} \rangle\rangle + b \langle\langle \eta_{j+1,l-1}^{n+1/2} - \eta_{j,l-1}^{n+1/2} \rangle\rangle] = 0 \quad (13)$$

$$[N_{j,l+1/2}^{n+1} - N_{j,l+1/2}^n] + c_0^2 \lambda_y [(1-2b) \langle\langle \eta_{j,l+1}^{n+1/2} - \eta_{j,l}^{n+1/2} \rangle\rangle + b \langle\langle \eta_{j+1,l+1}^{n+1/2} - \eta_{j+1,l}^{n+1/2} \rangle\rangle + b \langle\langle \eta_{j-1,l+1}^{n+1/2} - \eta_{j-1,l}^{n+1/2} \rangle\rangle] = 0 \quad (14)$$

ここで、 $b = (c_0^2 \Delta t^2 + 4h^2) / 6(\Delta x^2 + \Delta y^2)$ 、 また、

$\langle\langle f \rangle\rangle$ は以下の内挿補間を表している。

$$\langle\langle f_{j+1,l} - f_{j,l} \rangle\rangle = \frac{a_x^2 - 1}{24} (f_{j+2,l} - f_{j-1,l}) + \frac{9 - a_x^2}{24} (f_{j+1,l} - f_{j,l}) \quad (15)$$

$$\langle\langle f_{j,l+1} - f_{j,l} \rangle\rangle = \frac{a_y^2 - 1}{24} (f_{j,l+2} - f_{j,l-1}) + \frac{9 - a_y^2}{24} (f_{j,l+1} - f_{j,l}) \quad (16)$$

ただし、 $a_x^2 = (c_0^2 \Delta t^2 + 4h^2) / \Delta x^2$, $a_y^2 = (c_0^2 \Delta t^2 + 4h^2) / \Delta y^2$

である。また、 $a_x, a_y > \sqrt{3}$ のときは運動の式

中の圧力項について、式 (13) では l+1, l-1

をそれぞれ l+2, l-2 に、式 (14) は j+1, j-1

を j+2, j-2 と差分点を広げてとり、さらに

$b' = b/4$ とすることで計算が安定する。

2.3 差分方程式の厳密解

前節で示した差分方程式に対し、フーリエ級数展開により $e^{\pm ikcn\Delta t}$ の形の厳密解を得るこ

とができる。ここで、 $k^2 = k_x^2 + k_y^2$ 、 k_x 、 k_y はあるフーリエ成分における波数、である。今村ら (1986)、佐山ら (1987) の導出方法から、

・2/3 陰解法および陽解法

$$\frac{c_0}{c} = \frac{\sin^{-1}\sqrt{F}}{\sqrt{(\omega_x K_x)^2 + (\omega_y K_y)^2}} \quad (17)$$

・1/3 陰解法

$$\frac{c_0}{c} = \frac{\sin^{-1}\sqrt{G}}{\sqrt{(\omega_x K_x)^2 + (\omega_y K_y)^2}} \quad (18)$$

ただし、

$$\omega_x = \frac{k_x \Delta x}{2}, \quad \omega_y = \frac{k_y \Delta y}{2} \quad (19)$$

$$K_x = c_0 \Delta t / \Delta x, \quad K_y = c_0 \Delta t / \Delta y \quad (20)$$

$$F = \frac{E_x}{D} K_x^2 \sin^2 \omega_x \left(1 + \frac{1}{6} \mu \sin^2 \omega_x \right) + \frac{E_y}{D} K_y^2 \sin^2 \omega_y \left(1 + \frac{1}{6} \mu \sin^2 \omega_y \right) \quad (21)$$

$$G = \frac{E_x'}{A_x} K_x^2 \sin^2 \omega_x \left(1 + \frac{1}{6} \mu \sin^2 \omega_x \right) + \frac{E_y'}{A_y} K_y^2 \sin^2 \omega_y \left(1 + \frac{1}{6} \mu \sin^2 \omega_y \right) \quad (22)$$

$$A_x = 1 + 4\alpha_x H_x^2 \sin^2 \omega_x, \quad A_y = 1 + 4\alpha_y H_y^2 \sin^2 \omega_y \quad (23)$$

$$B_x = 4\beta_x H_x H_y \sin \omega_x \sin \omega_y, \quad B_y = 4\beta_y H_x H_y \sin \omega_x \sin \omega_y \quad (24)$$

$$B_x' = 4\beta_x H_y^2 \sin^2 \omega_y, \quad B_y' = 4\beta_y H_x^2 \sin^2 \omega_x \quad (25)$$

$$B_x'' = 4\beta_x H_y^2 \sin^2 \omega_y \left(1 + \frac{1}{6} \mu \sin^2 \omega_y \right), \quad B_y'' = 4\beta_y H_x^2 \sin^2 \omega_x \left(1 + \frac{1}{6} \mu \sin^2 \omega_x \right) \quad (26)$$

$$C_x = 1 + \frac{1}{6} \mu \sin^2 \omega_x + 4\gamma_x H_x^2 \sin^2 \omega_x + 4\delta_x H_y^2 \sin^2 \omega_y, \quad C_y = 1 + \frac{1}{6} \mu \sin^2 \omega_y + 4\delta_y H_x^2 \sin^2 \omega_x + 4\gamma_y H_y^2 \sin^2 \omega_y \quad (27)$$

$$D = A_x A_y - B_x B_y \quad (28)$$

$$E_x = C_x A_y - C_y B_x', \quad E_y = C_y A_x - C_x B_y' \quad (29)$$

$$E_x' = C_x - B_x'', \quad E_y' = C_y - B_y'' \quad (30)$$

求めた波速 c は以下のようにまとめることができる。

ここで、圧力項は $\mu=0$ の場合に 2 次精度、

$\mu=1$ の場合に 4 次精度になる。

- Variable Grid スキーム

$$\frac{c_0}{c} = \frac{\sin^{-1}\sqrt{F'}}{\sqrt{(\omega_x K_x)^2 + (\omega_y K_y)^2}} \quad (31)$$

$$F' = \left(1 - \frac{a_x^2 - 1}{6} \sin^2 \omega_x\right)^2 (1 - 4b \sin^2 \omega_y) K_x^2 \sin^2 \omega_x + \left(1 - \frac{a_y^2 - 1}{6} \sin^2 \omega_y\right)^2 (1 - 4b \sin^2 \omega_x) K_y^2 \sin^2 \omega_y \quad (32)$$

3. 数値モデルの安定条件

各数値モデルが安定した解となるには、
 $0 < F < 1$, $0 < G < 1$, $0 < F' < 1$ の条件を満たす必要がある（後藤, 2003）。一例として、以下に Madsen & Sorensen 式に対する 2/3 陰解法（佐山補正）および 1/3 陰解法（2 次精度）の安定条件を導出する。なお、ここでは簡単のため $\Delta x = \Delta y$ としている。

(a) 2/3 陰解法 (Madsen & Sorensen 型, 佐山補正)

式 (17) ~ (30) より, F は以下のように整理する事ができる。

$$F = \frac{2K^2 s (15 + 8H^2 s)}{15 - 5s + 48H^2 s + 10K^2 s} \quad (33)$$

ここで、 $K = K_x = K_y$, $H = H_x = H_y$, $s = \sin^2 \omega_x = \sin^2 \omega_y$, ($0 \leq s \leq 1$) である。 $0 < F$ は常に満たされるから $F < 1$ のみを考えればよい。よって、

$$16H^2 K^2 s^2 + (5 - 48H^2 + 20K^2)s - 15 < 0 \quad (34)$$

となる。左辺 = $f(s)$ とおくと $f(0) = -15$ であるから安定条件は $f(1) < 0$ であればよい。ゆえに整理すると、

$$K^2 < \frac{1}{2} \cdot \frac{1 + (24/5)H^2}{1 + (4/5)H^2} \quad (35)$$

が求める安定条件である。

(b) 1/3 陰解法 (Madsen & Sorensen 式)

G を (a) と同様に整理すると、

$$G = -\frac{2K^2 s (-15 + 16H^2 s)}{3(5 + 8H^2 s)} \quad (36)$$

$0 < G$ を満たす条件は $-15 + 16H^2 < 0$ であるので、安定条件の一つとして、

$$H^2 < \frac{15}{16} \quad (37)$$

となる。一方 $G < 1$ の条件では、

$$f(s) = -\frac{2s(-15 + 16H^2 s)}{3(5 + 8H^2 s)} \quad (38)$$

の最大値が $1/K^2$ より小さいかという問題を考えてやればよい。ここで $f'(0) = 2 > 0$ であるので、以下のように場合分けができる。

$f'(1) > 0$ のとき、関数は単調増加なので $f(1)$ で最大となる。したがって、

$$H^2 < \frac{5}{16} (\sqrt{10} - 2) \quad \text{のとき}, \quad K^2 < \frac{1}{2} \cdot \frac{1 + (8/5)H^2}{1 - (16/15)H^2} \quad (39)$$

$f'(1) < 0$ のとき、 f が極大値となる位置 s で最大となる。

$$H^2 > \frac{5}{16} (\sqrt{10} - 2) \quad \text{のとき}, \quad K^2 < \frac{1}{2} \cdot \frac{(12/5)H^2}{7 - 2\sqrt{10}} \quad (40)$$

すなわち、 $G, F < 1$ はクーラン数を規定し、 $0 < G$ は空間格子間隔の下限を規定する条件である。以下、同様の導出方法により、各数値モデルの安定条件を列挙する。

i) 2/3 陰解法 (Boussinesq 型)

$$2 \text{ 次精度の圧力項の場合 } K^2 < \frac{1}{2} + \frac{4}{3}H^2 \quad (41)$$

$$4 \text{ 次精度の場合 } K^2 < \frac{1}{49}(18 + 48H^2) \quad (42)$$

$$\text{佐山補正の場合 } K^2 < \frac{1}{2} + 2H^2 \quad (43)$$

ii) 2/3 陰解法 (Madsen-Sorensen 型)

$$2 \text{ 次精度の場合 } K^2 < \frac{1}{2} \cdot \frac{1+(16/5)H^2}{1+(8/15)H^2} \quad (44)$$

$$\text{佐山補正の場合 } K^2 < \frac{1}{2} \cdot \frac{1+(24/5)H^2}{1+(4/5)H^2} \quad (45)$$

iii) 陽解法 (Boussinesq 型, 空間 2 次精度中心差分の圧力項)

$$H^2 < 3/16 \text{ のとき, } K^2 < \frac{1}{2-16H^2/3}$$

$$H^2 > 3/16 \text{ のとき, } K^2 < 16H^2/3$$

$$H^2 < 3/8 \quad (46)$$

iv) 1/3 陰解法

Boussinesq 型, 2 次精度

$$H^2 < (3\sqrt{2}-3)/4 \text{ のとき, } K^2 < \frac{1}{2} \cdot \frac{1+4H^2/3}{1-4H^2/3}$$

$$H^2 > (3\sqrt{2}-3)/4 \text{ のとき, } K^2 < \frac{1}{2} \cdot \frac{4H^2/3}{6-4\sqrt{2}}$$

$$H^2 < 3/4 \quad (47)$$

Madson-Sorensen 型, 2 次精度

$$H^2 < \frac{5}{16}(\sqrt{10}-2) \text{ のとき, } K^2 < \frac{1}{2} \cdot \frac{1+(8/5)H^2}{1-(16/15)H^2}$$

$$H^2 > \frac{5}{16}(\sqrt{10}-2) \text{ のとき, } K^2 < \frac{1}{2} \cdot \frac{(12/5)H^2}{7-2\sqrt{10}}$$

$$H^2 < 15/16 \quad (48)$$

v) Variable Grid スキーム

$$a^2 (= a_x^2 = a_y^2) = 0.5 \text{ のとき, } K < 0.71$$

$$a^2 = 1 \text{ のとき, } K < 0.87$$

$$a^2 = 2 \text{ のとき, } K < 1.31$$

$$K^2 < 3 - 4H^2 \quad (49)$$

上記に示した安定条件を図化したものを図 1 から図 6 に示す。それぞれの図において曲線と直線に囲まれた領域内が計算安定領域である。2/3 陰解法はクーラン数 K に対する規定を満たせば全ての H に対して安定である。一方陽解法, 1/3 陰解法そして Variable Grid スキームでは, $F', G < 0$ に対応した式により

空間格子間隔の下限が規定され、空間格子間隔 Δx は静水深 H よりも小さく設定できない。クーラン数 K に関しては、陽解法を除く全てのスキームは少なくとも $K < 0.5$ とすれば安定である。また、図 1 と図 2 の空間差分精度の違いとして、分散項に佐山補正を考慮することにより計算安定領域が K 方向に對して拡大するのに対し、4 次精度の場合は計算安定領域が狭まり、安定条件は厳しくなる。

一般に実地形に対し津波数値計算を行う場合、時間間隔は空間格子間隔に比べ比較的自由に設定することができる。そのため K に関する安定性は時間間隔を小さくすることで簡単に条件を満たすことが可能である。一方 H に関する安定条件については、2/3 陰解法以外の計算法は空間格子の下限が計算対象領域中の最大静水深に支配されるため、安定条件を満たすために空間格子を大きく設定する必要がある。そのため地形の空間解像度の精度低下や、津波初期波源の大きさによっては津波の波長分割数が粗くなる可能性がある。

4. 各スキームの数値誤差と方向依存性

ここでは各スキームの波速 (c) に対して微小振幅表面波による理論波速 (c_s) を真値とした、各スキームの誤差の大きさおよび方向依存性について評価する。なお、数値誤差は H が支配的であり、 K の変化には大きく依存しないことから、ここでは全てのケースについて $K_x = K_y = 0.5$ とし、パラメータ H の変化に対する誤差特性について検討している。

図 7 から図 18 に、 $H_x = H_y = 0.5$ の波速に関する数値誤差を示す。 $\omega_x = \omega_y = \pi/2$ はナイキスト波数であり、数値計算で表現できる最も短い波長の成分 ($2\Delta x, 2\Delta y$) を表している。図より、全ての場合において原点近くで誤差が小さくなっている、高波数成分になるにつれて誤差が大きくなる傾向にある。2 次精度の場合 (図 7, 10, 13, 16), 波速はどの成分波においても過小評価であり、座標軸方向に進む波はその度合いが高く、対角方向では度合いが低い。これは、座標軸方向の

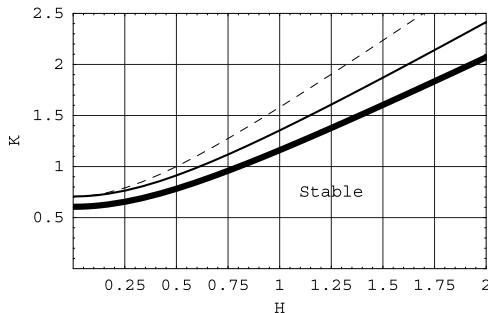


図 1 2/3 陰解法 (Boussinesq 式) の計算安定領域。図中、波線は佐山補正、細実線は 2 次精度、太実線は 4 次精度中心差分である。

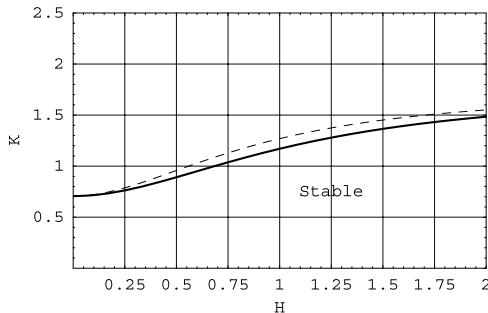


図 2 2/3 陰解法 (Madsen-Sorensen 式) の計算安定領域、図中、波線は佐山補正、細実線は 2 次精度中心差分である。

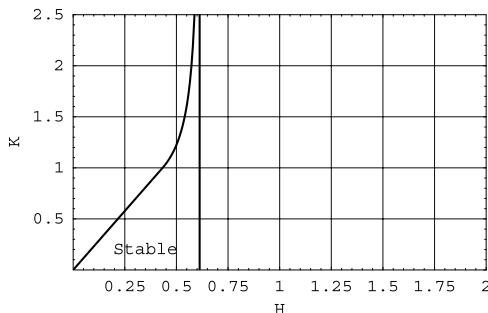


図 3 陽解法 (Boussinesq 式) の計算安定領域

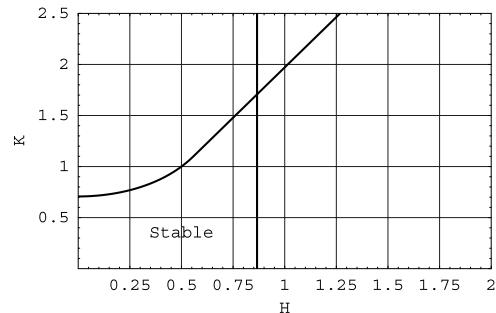


図 4 1/3 陰解法 (Boussinesq 式, 2 次精度) の計算安定領域

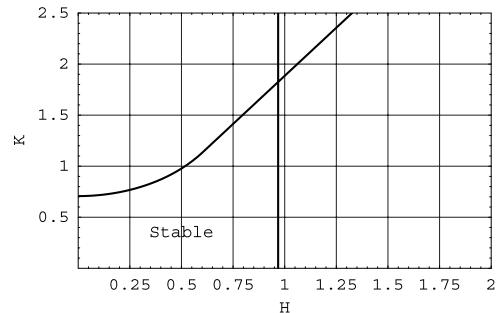


図 5 1/3 陰解法 (Madsen-Sorensen 式, 2 次精度) の計算安定領域

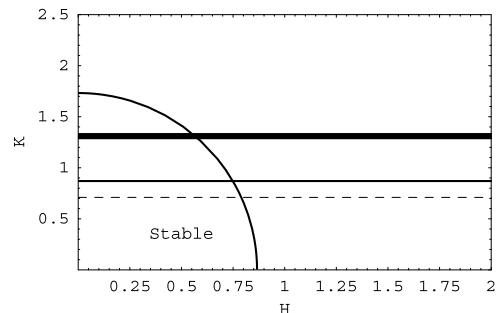


図 6 Variable Grid スキームの計算安定領域

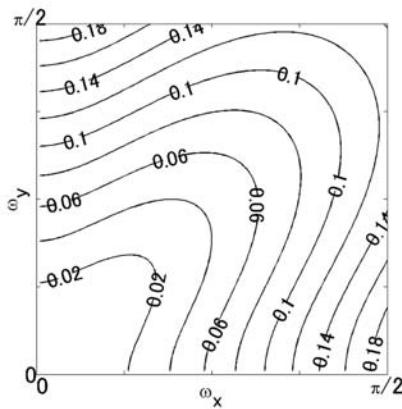


図 7 2/3 陰解法 (Boussinesq 式, 2 次精度) の波速に関する数値誤差 ($H_x=H_y=0.5$)

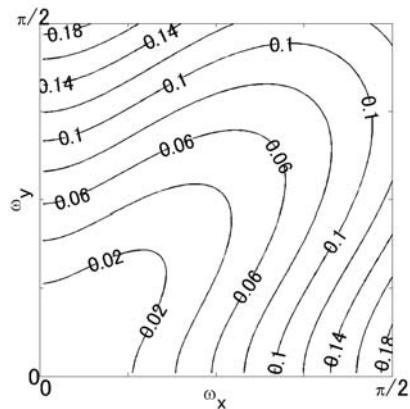


図10 2/3 陰解法 (Madsen-Sorensen 式, 2 次精度) の波速に関する数値誤差 ($H_x=H_y=0.5$)

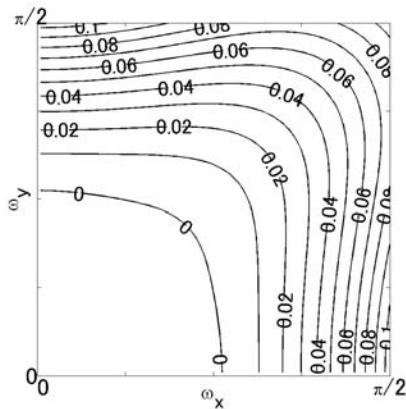


図 8 2/3 陰解法 (Boussinesq 式, 佐山補正) の波速に関する数値誤差 ($H_x=H_y=0.5$)

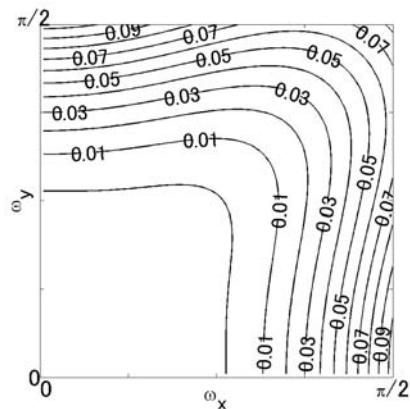


図11 2/3 陰解法 (Madsen-Sorensen 式, 佐山補正) の波速に関する数値誤差 ($H_x=H_y=0.5$)

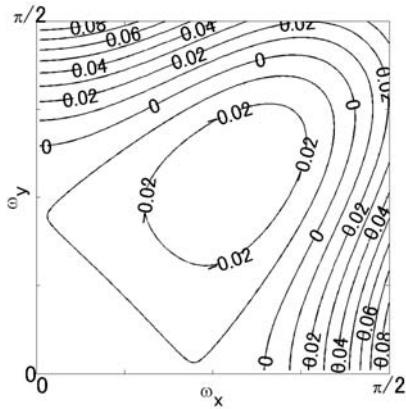


図 9 2/3 陰解法 (Boussinesq 式, 4 次精度) の波速に関する数値誤差 ($H_x=H_y=0.5$)

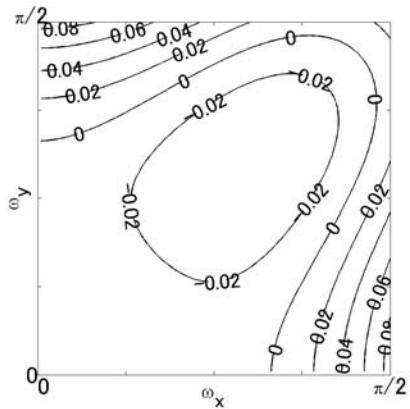


図12 2/3 陰解法 (Madsen-Sorensen 式, 4 次精度) の波速に関する数値誤差 ($H_x=H_y=0.5$)

分散効果が過大評価される事を意味している。方向依存性は、空間中心差分によって生じる数値分散に起因するものであり、佐山補正もしくは4次精度を利用することによって抑制することが出来る。以下、各スキームによる誤差分布の特性について議論する。

図7から図12より、2/3陰解法について Boussinesq式と Madsen-Sorensen式では両者の誤差分布に大きな差はなく、佐山補正や4次精度により誤差と方向依存性を抑制することができる。なお、図9と図12において、4次精度では理論波速よりも速い波速成分が存在し、一番速い波速と遅い波速間での絶対誤差は、佐山補正での最大誤差の大きさと同等であるといえる（図8、11）。さらに誤差自体は小さいものの、4次精度の方が方向依存性が強いともいえる。次に図13、14、15を比較すると、陽解法は4次精度とすることにより誤差が小さくなるとともに方向性も優れていることがわかる。また、この傾向は Variable Grid スキームでも同様に見られる。さらに、1/3陰解法の数値誤差は、図16、17、18に示すように2/3陰解法よりも大きいものの方向依存性に優れており、陽解法と2/3陰解法の中間となるような特徴をもつ。

次に、図19から図23に $H_x = H_y = 2.0$ の場合の、2/3陰解法の誤差を評価した結果を示す。図19、20から、Madsen-Sorensen式は Boussinesq式よりも高波数成分において最大約10%誤差が小さい。さらに図21、22より、数値分散を抑制する事によって誤差は小さくなる。しかし、佐山補正と4次精度の誤差分布には差が見られ、特に後者では対角方向において波速が過大評価となる傾向にある。さらに図23、24、25のように $H_x = H_y = 3.0$ とすると、4次精度による数値分散抑制の効果はなくなり、佐山補正の方が誤差を小さくすることができる。

以上より、 $H_x = H_y = 0.5$ の場合は4次精度の陽解法またはVariable Grid スキームが適しており、また、 $H > 2.0$ では Madsen-Sorensen式の佐山補正による2/3陰解法が精度の高い数値解を得る事が期待できる。

5. H に対する数値誤差の変化

線形分散波モデルの安定条件はパラメータ H が支配的である事は前にも述べた。そのため実地形に対して数値計算を行う場合は、比較的広範囲な H に対して安定した計算が可能で、かつ誤差が小さい数値モデルを選ぶのが望ましい。そこでここでは、 H が変化した場合の各スキームの数値誤差について検討する。図26は、Boussinesq式の場合の H と絶対誤差の最大値との関係である。図より、2/3陰解法以外のスキームは $0.4 < H$ の範囲で誤差が増大することがわかる。また、 $H < 0.5$ の範囲においては4次精度の陽解法と1/3陰解法の誤差が最も小さい。しかし、安定性を比較すると陽解法は $H < 0.6$ であるため、 $H < 0.9$ の範囲で安定する1/3陰解法の方がより実用的であるといえる。また、Variable Grid スキームは $H > 0.4$ で拡張モデルに切り替えることにより、 $H < 1.0$ の範囲で30%以内の誤差で計算結果を得る事ができ、さらに計算時間も小さくてすむ。ゆえに $H < 0.9$ の範囲で数値計算を行う場合、4次精度の1/3陰解法もしくはVariable Grid スキームがより実用的である。

図27は、2/3陰解法による Boussinesq式と Madsen-Sorensen式の絶対誤差の最大値を比較したものである。 $H < 0.5$ では誤差はほぼ同程度であり、佐山補正を考慮する事によりさらに誤差は小さく抑えることができる。その後 H が大きくなると、Madsen-Sorensen式は Boussinesq式よりも誤差が小さいことがわかる。しかし、 $H > 2.6$ になるとこの誤差は徐々に大きくなる。これは、高波数成分では Madsen-Sorensen式の波速が一定値に漸近するためである。このような高波数成分は津波解析において重要ではないと考えられるが、Madsen-Sorensen式を利用する場合、以上のことに注意する必要がある。

ゆえに、2/3陰解法は分散項の係数によらず全ての H について安定するため、細かい空間格子でこのスキームを利用すれば高精度な結果を得る事が期待できる。このことは、津

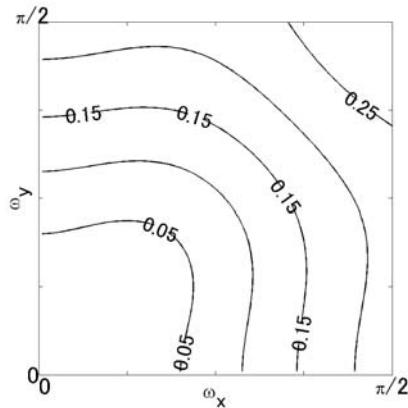


図13 陽解法 (Boussinesq 式, 2 次精度) の
波速に関する数値誤差 ($H_x=H_y=0.5$)

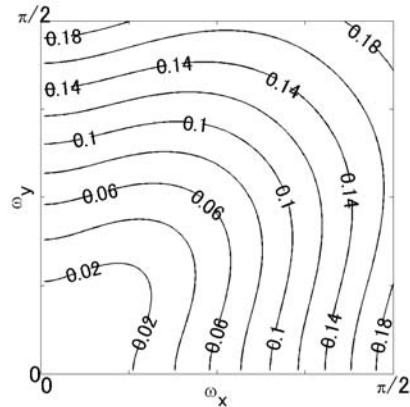


図16 1/3 陰解法 (Boussinesq 式, 2 次精度)
の波速に関する数値誤差 ($H_x=H_y=0.5$)

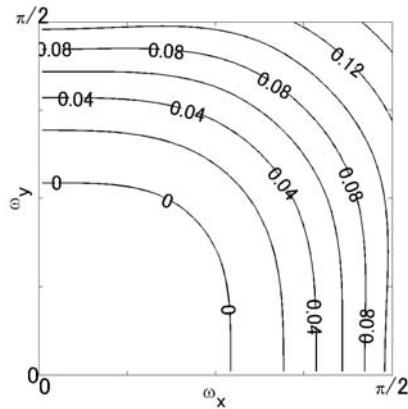


図14 陽解法 (Boussinesq 式, 4 次精度) の
波速に関する数値誤差 ($H_x=H_y=0.5$)

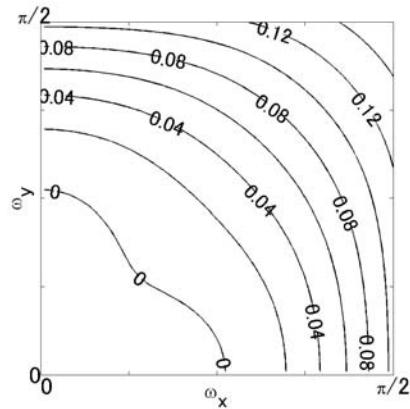


図17 1/3 陰解法 (Boussinesq 式, 佐山補正)
の波速に関する数値誤差 ($H_x=H_y=0.5$)

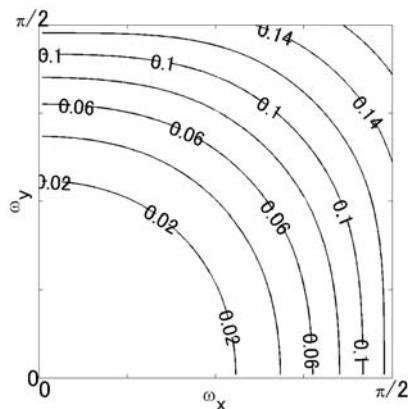


図15 Variable Grid スキームの波速に関する
数値誤差 ($H_x=H_y=0.5$)

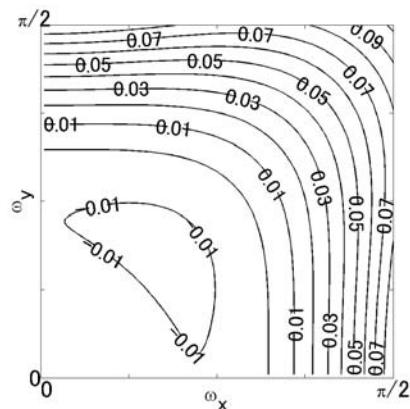


図18 1/3 陰解法 (Boussinesq 式, 4 次精度)
の波速に関する数値誤差 ($H_x=H_y=0.5$)

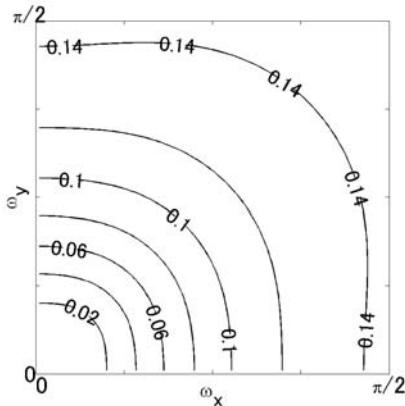


図19 2/3陰解法 (Boussinesq式, 2次精度)
の波速に関する数値誤差 ($H_x=H_y=2.0$)

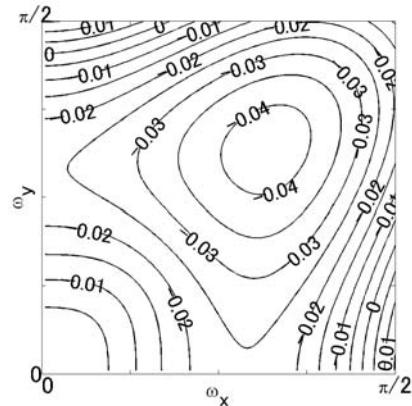


図22 2/3陰解法 (Madsen-Sorensen式, 4次精度)
の波速に関する数値誤差 ($H_x=H_y=2.0$)

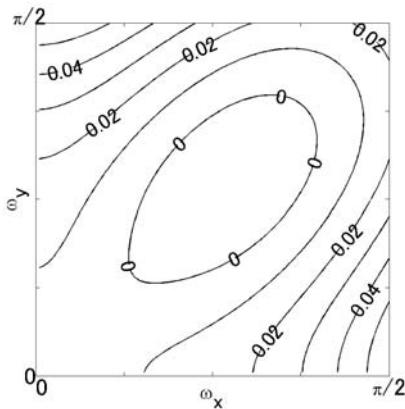


図20 2/3陰解法 (Madsen-Sorensen式, 2次精度)
の波速に関する数値誤差 ($H_x=H_y=2.0$)

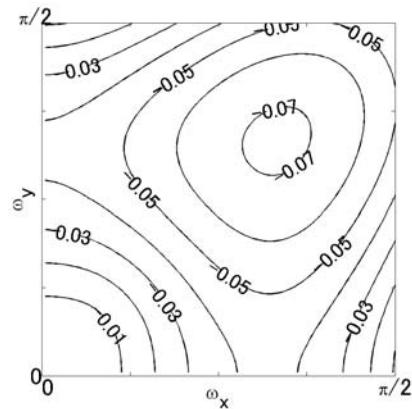


図23 2/3陰解法 (Madsen-Sorensen式, 2次精度)
の波速に関する数値誤差 ($H_x=H_y=3.0$)

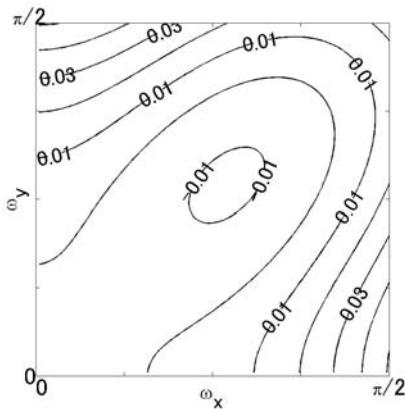


図21 2/3陰解法 (Madsen-Sorensen式, 佐山補正)
の波速に関する数値誤差 ($H_x=H_y=2.0$)

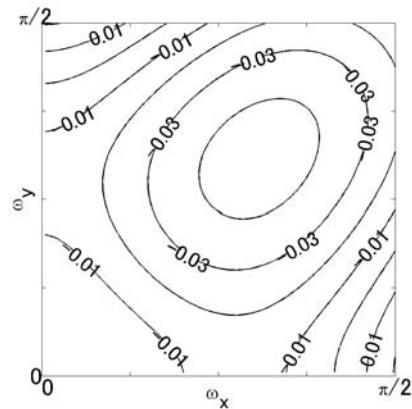


図24 2/3陰解法 (Madsen-Sorensen式, 佐山補正)
の波速に関する数値誤差 ($H_x=H_y=3.0$)

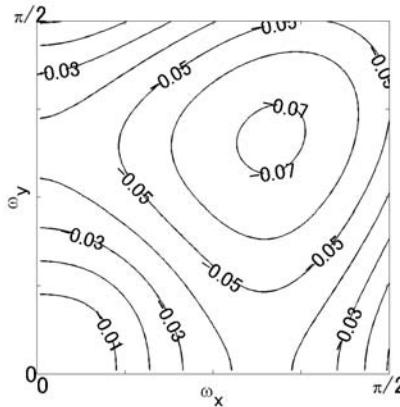


図25 2/3陰解法(Madsen-Sorensen式, 4次精度)
の波速に関する数値誤差 ($H_x=H_y=3.0$)

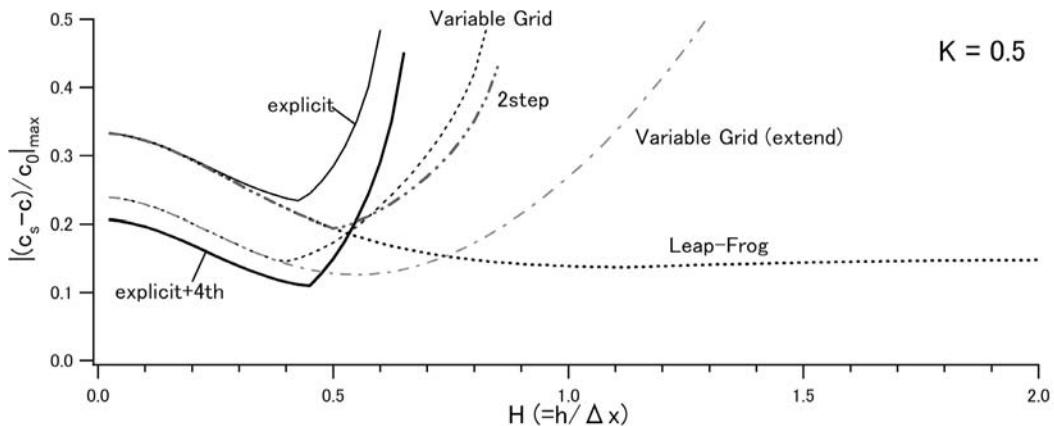


図26 Boussinesq 式の最大誤差の変化

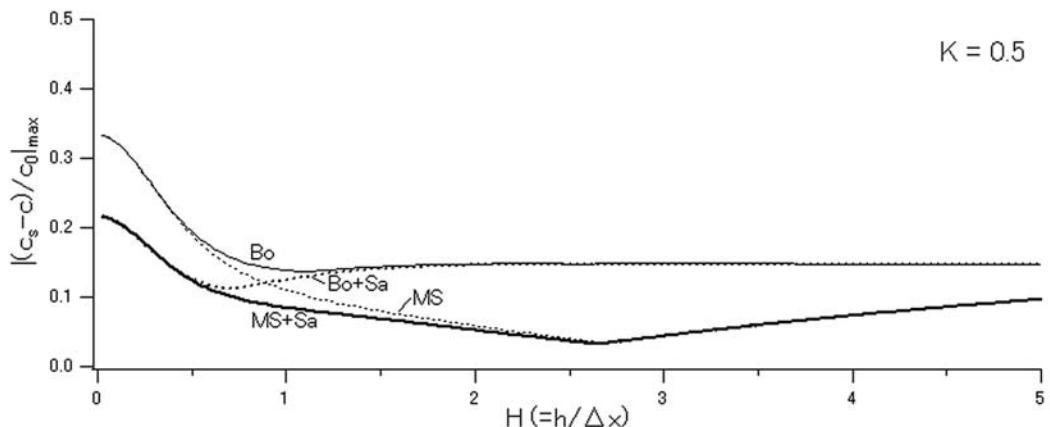


図27 2/3陰解法による Boussinesq 式と Madsen-Sorensen 式の最大誤差の変化
Sa 佐山補正

波の数値解析を実地形に対して行う場合に、水深分布が 100m ～ 数 km に及ぶことからも非常に現実的であるといえる。しかしながら、現在 2/3 陰解法の数値解法は SOR 法による逐次代入のみであり、計算時間が膨大となるといった問題がある。

6. おわりに

本稿では、これまでに提案されている 2 次元平面問題に対する線形分散波数値モデルの厳密解を求め、安定条件および理論解との誤差から各モデルの適用範囲について検討した。線形分散波数値モデルの安定条件はクーラン数と水深と空間格子との比 H に依存し、2/3 陰解法以外の計算法は空間格子の下限値が存在する。次に、各差分スキームの数値誤差の大きさおよびその方向依存性について評価した。空間格子が水深に対して大きい ($H < 0.9$) 場合、4 次精度の 1/3 陰解法もしくは Variable Grid スキームは方向性に優れ、より実用的である。一方、空間格子を細かく設定するには、全ての H について安定した計算が可能な 2/3 陰解法を選ぶ必要があり、その際、佐山補正を考慮した Madsen-Sorensen 式が最も誤差が小さい。しかし、この計算法は膨大な計算時間が必要なため、2/3 陰解法の高速計算法の開発が望まれる。

参考文献

- 今村文彦、後藤智明 (1986) : 差分法による津波数値計算の打ち切り誤差、土木学会論文集、第 375 号／II-6, pp.241-250。
- 後藤智明 (2003) : 2 段階混合差分法を用いた線形分散波方程式の数値計算における打ち切り誤差、津波工学研究報告第 20 号, pp.13-22。
- 佐山順二、今村文彦、後藤智明、首藤伸夫 (1987) : 外海域における津波の高精度計算法における検討、第 34 回海岸工学講演会論文集, pp.177-181。
- 岩瀬浩之、見上敏文、後藤智明 (1998) : 非線形分散波理論を用いた実用的な津波計算モデル、土木学会論文集、No.600／II-44, pp.119-124。
- 鴨原良典、今村文彦 (2003) : 長波計算における擬似 Variable Grid System の提案、海岸工学論文集、第 50 卷, pp.6-10。
- 鴨原良典 (2004) : 非線形分散波理論の津波数値解析への適用に関する研究、東北大学学位論文, pp.60-62。
- Kowalik, Z. (2003): Basic relations between tsunamis calculation and their physics- II , Science of Tsunami Hazards, Vol. 21, Number 3, pp.154-173.
- Yoon, S. B. (2002): Propagation of distant tsunamis over slowly varying topography, J. Geophys. Res., 07(C10), 3140, doi: 1029/2001JC000791, pp.4-11.