

## 2 段階混合差分法を用いた 線形分散波方程式の数値計算における打ち切り誤差

後藤 智明\*

### 1. はじめに

数値計算は、津波の再現、被害予測、そして現象を理解するための教育ツールとしても、非常に有用である。それだけに、数値計算の誤差特性を把握しておくことは重要な課題である。

数値誤差の特性を研究する手法として、理論解あるいは実験値と数値解を比較する手法と、打ち切り誤差そのものを理論的に求める手法が挙げられる。前者の例として長谷川ら (1987)、藤間ら (1998)、原ら (1998)、岩瀬ら (2002) などの研究がある。長谷川ら、藤間らは線形長波理論の理論解と数値解を比較し、精度の良い数値解を得るために必要な格子分割数を議論している。原らは、非線形分散波方程式の多段階解法を提案し、ソリトン分裂の実験結果と数値解を比較して、計算点配置や格子間隔が数値解に与える影響を調べた。また岩瀬らは、非線形分散波方程式の2段階混合差分法を提案し、実験結果との比較を通して、適切な支配方程式形を議論している。この手法は比較的多くの問題に適用できるが、数多くの数値計算を実施しなければならない。しかも、計算結果のどこに注目すべきかがあらかじめ分かっていないと議論がしにくく、試行錯誤せざるを得ないという問題もある。

一方、後者の例として今村・後藤 (1986)、佐山ら (1987) などが挙げられる。今村・後藤は1次元線形長波理論に対し、Leap-Frog法、Crank-Nicholson法および2-step Lax-Wendroff法で差分化したときの擬似微分方程

式の近似解および差分方程式の厳密解を求め、その誤差特性を調べた。佐山らは、2次元線形分散波理論をLeap-Frog形式で差分化し運動の式のみ陰的に解くスキームに対する差分方程式の厳密解を求めた。さらに、数値分散性を打ち消す人為的な項を付加することで適切な分散性を保持する高精度計算法を提案している。この後者の手法は水平床のような限られた場合にしか適用できないが、あらゆる格子間隔に対する誤差特性が概観できる利点がある。

さて、上述の通り、原ら、岩瀬らなどにより分散波方程式を多段階スキームで解く方法が提案されており、ソリトン分裂の再現などに成果を上げている。しかし、このスキームの打ち切り誤差の特性はまだよく分かっていない。そこでここでは、線形分散波理論の計算に2段階混合差分法を用いた場合の打ち切り誤差特性を、差分方程式の厳密解を導くことにより議論する。また、同じStaggered配置の空間格子を用いて①時間発展にLeap-Frog法を用いて運動の式を陰的に解くスキーム、②時間発展にCrank-Nicholson法を用いて連続の式と運動の式を陰的に解くスキームに対しても同様の解を導き、比較を行う。

なお、ここで使用した方程式は $x-y$ 座標系での線形分散波理論であり、遠地津波の計算に使われる球座標系の式ではないし、また週上域を含めた計算に使用される非線形項を含んだ式でもないが、基礎的な数値誤差特性の検討という意味で、本検討は分散項を考慮したあらゆる数値計算に有益であろう。

\* 東海大学工学部

## 2. 差分方程式の厳密解

### (1) 検討に使用する支配方程式

以下の線形分散波方程式を考える。

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{\partial M}{\partial x} + \frac{\partial N}{\partial y} = 0 \quad (1)$$

$$\frac{\partial M}{\partial t} + c_0^2 \frac{\partial \eta}{\partial x} = \frac{h^2}{3} \frac{\partial}{\partial x} \left[ \frac{\partial^2 M}{\partial t \partial x} + \frac{\partial^2 N}{\partial t \partial y} \right] \quad (2)$$

$$\frac{\partial N}{\partial t} + c_0^2 \frac{\partial \eta}{\partial y} = \frac{h^2}{3} \frac{\partial}{\partial y} \left[ \frac{\partial^2 N}{\partial t \partial y} + \frac{\partial^2 M}{\partial t \partial x} \right] \quad (3)$$

ここで、 $\eta$  は水位、 $M$ 、 $N$  は  $x$ 、 $y$  方向の線流量、 $c_0$  は線形長波の波速 ( $=\sqrt{gh}$ 、 $h$  は水深)、 $g$  は重力加速度である。

### (2) 2段階混合差分法

2段階混合差分法では、連続の式 (1) は 1 段で計算し、運動の式 (2)、(3) の計算を以下の 2 段階に分けて行う。差分式を以下に示す。

[連続の式]

$$\left[ \eta_{j,\ell}^{n+\frac{1}{2}} - \eta_{j,\ell}^{n-\frac{1}{2}} \right] + \lambda_x \left[ M_{j+\frac{1}{2},\ell}^n - M_{j-\frac{1}{2},\ell}^n \right] + \lambda_y \left[ N_{j,\ell+\frac{1}{2}}^n - N_{j,\ell-\frac{1}{2}}^n \right] = 0 \quad (4)$$

[運動の式 1 段目]

$$\left[ M_{j+\frac{1}{2},\ell}^* - M_{j+\frac{1}{2},\ell}^n \right] + c_0^2 \lambda_x \left[ \eta_{j+1,\ell}^{n+\frac{1}{2}} - \eta_{j,\ell}^{n+\frac{1}{2}} \right] = 0 \quad (5)$$

$$\left[ N_{j,\ell+\frac{1}{2}}^* - N_{j,\ell+\frac{1}{2}}^n \right] + c_0^2 \lambda_y \left[ \eta_{j,\ell+1}^{n+\frac{1}{2}} - \eta_{j,\ell}^{n+\frac{1}{2}} \right] = 0 \quad (6)$$

[運動の式 2 段目]

$$\begin{aligned} & \left[ M_{j+\frac{1}{2},\ell}^{n+1} - M_{j+\frac{1}{2},\ell}^* \right] \\ &= \frac{H_x^2}{3} \left[ \left( M_{j+\frac{1}{2},\ell}^{n+1} - 2M_{j+\frac{1}{2},\ell}^* + M_{j-\frac{1}{2},\ell}^{n+1} \right) \right. \\ & \quad \left. - \left( M_{j+\frac{1}{2},\ell}^n - 2M_{j+\frac{1}{2},\ell}^* + M_{j-\frac{1}{2},\ell}^n \right) \right] \\ &+ \frac{H_x H_y}{3} \left[ \left( N_{j+1,\ell+\frac{1}{2}}^* - N_{j+1,\ell-\frac{1}{2}}^* - N_{j,\ell+\frac{1}{2}}^* \right. \right. \\ & \quad \left. \left. + N_{j,\ell-\frac{1}{2}}^* \right) - \left( N_{j+1,\ell+\frac{1}{2}}^n - N_{j+1,\ell-\frac{1}{2}}^n \right) \right] \end{aligned}$$

$$\left. - N_{j,\ell+\frac{1}{2}}^n + N_{j,\ell-\frac{1}{2}}^n \right] \quad (7)$$

$$\begin{aligned} & \left[ N_{j,\ell+\frac{1}{2}}^{n+1} - N_{j,\ell+\frac{1}{2}}^* \right] \\ &= \frac{H_y^2}{3} \left[ \left( N_{j,\ell+\frac{1}{2}}^{n+1} - 2N_{j,\ell+\frac{1}{2}}^* + N_{j,\ell-\frac{1}{2}}^{n+1} \right) \right. \\ & \quad \left. - \left( N_{j,\ell+\frac{1}{2}}^n - 2N_{j,\ell+\frac{1}{2}}^* + N_{j,\ell-\frac{1}{2}}^n \right) \right] \\ &+ \frac{H_x H_y}{3} \left[ \left( M_{j+\frac{1}{2},\ell+1}^* - M_{j+\frac{1}{2},\ell}^* - M_{j-\frac{1}{2},\ell+1}^* \right. \right. \\ & \quad \left. \left. + M_{j-\frac{1}{2},\ell}^* \right) - \left( M_{j+\frac{1}{2},\ell+1}^n - M_{j+\frac{1}{2},\ell}^n \right. \right. \\ & \quad \left. \left. - M_{j-\frac{1}{2},\ell+1}^n + M_{j-\frac{1}{2},\ell}^n \right) \right] \quad (8) \end{aligned}$$

ただし、 $\lambda_x = \Delta t / \Delta x$ 、 $\lambda_y = \Delta t / \Delta y$ 、 $H_x = h / \Delta x$ 、 $H_y = h / \Delta y$  を表す。

すなわち、1 段目は線形長波と見なした計算を行い、2 段目で分散項による補正を行う。遡上の先端では、1 段目の計算で岩崎・真野の方法を適用し、2 段目ではその値を境界値として使用する。また、沖側境界でも 1 段目に放射境界条件による計算を実施し、2 段目でその値を境界値として使用する。すなわち、陸上先端部と沖側境界部では従来の方法と同じ計算を行い、分散項の評価を省略していることになる。また、2 段目において、 $M$  の式では  $M$  の  $x$  方向微分のみが、 $N$  の式では  $N$  の  $y$  方向微分のみが陰的に表現されているため、 $M$  の式と  $N$  の式を別々に解くことができ、2 段目の計算は単純な 3 重対角行列を解くだけでよいことになる。これにより、他の陰解法に比べて計算量を大幅に減らすことが可能である。すなわち、本計算方法は ADI 法と同様の利点を有するといえる。このように、2 段階混合差分法は遡上先端の扱いが容易で計算時間が節約できる手法である。なお、移流項を考慮するとき、2 段目の計算が陰に行われるため、必ずしも移流項に 1 次風上差分を使用する必要がなく、数値粘性を抑えることができるのもこの解法の利点である。

差分式を計算して得られる水位  $\eta$  と線流量  $M$ 、 $N$  は格子点上だけで定義される有限個の離散量である。したがって、ある時刻での水位および線流量を  $x$  方向、 $y$  方向に有限フー

リエ変換し、以下のように表すことができる。

$$\begin{bmatrix} \eta_{j,\ell}^n \\ M_{j,\ell}^n \\ N_{j,\ell}^n \end{bmatrix} = \sum_{r=0}^{R-1} \sum_{s=0}^{S-1} \begin{bmatrix} \tilde{\eta}_{r,s}^n \\ \tilde{M}_{r,s}^n \\ \tilde{N}_{r,s}^n \end{bmatrix} e^{ik_x j \Delta x} e^{ik_y \ell \Delta y} \quad (9)$$

ただし、 $\tilde{\eta}_{r,s}$ 、 $\tilde{M}_{r,s}$ 、 $\tilde{N}_{r,s}$ は有限フーリエ係数で、時間の関数である。また、 $R$ と $S$ はそれぞれ $x$ 、 $y$ 方向の格子点数であり、 $k_x = 2\pi \frac{r}{R\Delta x}$ 、 $k_y = 2\pi \frac{s}{S\Delta y}$ 、 $i = \sqrt{-1}$ を表す。

上式を差分式に代入し、整理すると、各成分が以下の関係を満たしていることが分かる。

$$\tilde{\eta}_{r,s}^{n+1/2} - \tilde{\eta}_{r,s}^{n-1/2} + 2i\lambda_x \sin \omega_x \tilde{M}_{r,s}^n + 2i\lambda_y \sin \omega_y \tilde{N}_{r,s}^n = 0 \quad (10)$$

$$\tilde{M}_{r,s}^* - \tilde{M}_{r,s}^n + 2ic_0^2 \lambda_x \sin \omega_x \tilde{\eta}_{r,s}^{n+1/2} = 0 \quad (11)$$

$$\tilde{N}_{r,s}^* - \tilde{N}_{r,s}^n + 2ic_0^2 \lambda_y \sin \omega_y \tilde{\eta}_{r,s}^{n+1/2} = 0 \quad (12)$$

$$\begin{aligned} (\tilde{M}_{r,s}^{n+1} - \tilde{M}_{r,s}^*) + \frac{4}{3} H_x^2 \sin^2 \omega_x (\tilde{M}_{r,s}^{n+1} - \tilde{M}_{r,s}^n) \\ + \frac{4}{3} H_x H_y \sin \omega_x \sin \omega_y (\tilde{N}_{r,s}^* - \tilde{N}_{r,s}^n) = 0 \end{aligned} \quad (13)$$

$$\begin{aligned} (\tilde{N}_{r,s}^{n+1} - \tilde{N}_{r,s}^*) + \frac{4}{3} H_y^2 \sin^2 \omega_y (\tilde{N}_{r,s}^{n+1} - \tilde{N}_{r,s}^n) \\ + \frac{4}{3} H_x H_y \sin \omega_x \sin \omega_y (\tilde{M}_{r,s}^* - \tilde{M}_{r,s}^n) = 0 \end{aligned} \quad (14)$$

ただし、例えば、 $t = n \Delta t$ における $\eta$ の有限フーリエ係数を $\tilde{\eta}_{r,s}^n$ のように表している。また、 $\omega_x$ 、 $\omega_y$ は以下の量を表す。

$$\omega_x = \frac{r\pi}{R} = \frac{k_x \Delta x}{2} \quad (15)$$

$$\omega_y = \frac{s\pi}{S} = \frac{k_y \Delta y}{2} \quad (16)$$

式(11)と式(13)の和を取り、 $(\tilde{N}_{r,s}^* - \tilde{N}_{r,s}^n)$ の項に式(12)を代入すると次式を得る。

$$A_x (\tilde{M}_{r,s}^{n+1} - \tilde{M}_{r,s}^n) + 2ic_0^2 \lambda_x \sin \omega_x A'_y \tilde{\eta}_{r,s}^{n+1/2} = 0 \quad (17)$$

$$A_x = 1 + \frac{4}{3} H_x^2 \sin^2 \omega_x \quad (18)$$

$$A'_y = 1 - \frac{4}{3} H_y^2 \sin^2 \omega_y \quad (19)$$

同様に、式(12)と式(14)を足し、式(11)を考慮すると次式が求められる。

$$A_y (\tilde{N}_{r,s}^{n+1} - \tilde{N}_{r,s}^n) + 2ic_0^2 \lambda_y \sin \omega_y A'_x \tilde{\eta}_{r,s}^{n+1/2} = 0 \quad (20)$$

$$A_y = 1 + \frac{4}{3} H_y^2 \sin^2 \omega_y \quad (21)$$

$$A'_x = 1 - \frac{4}{3} H_x^2 \sin^2 \omega_x \quad (22)$$

連続の式(10)は、 $n$ を $n+1$ に置き換えても成立するから、

$$\begin{aligned} \tilde{\eta}_{r,s}^{n+3/2} - \tilde{\eta}_{r,s}^{n+1/2} + 2i\lambda_x \sin \omega_x \tilde{M}_{r,s}^{n+1} \\ + 2i\lambda_y \sin \omega_y \tilde{N}_{r,s}^{n+1} = 0 \end{aligned} \quad (23)$$

の関係もまた成立し、式(23)から式(10)を差し引くと次式が求められる。

$$\begin{aligned} \tilde{\eta}_{r,s}^{n+3/2} - 2\tilde{\eta}_{r,s}^{n+1/2} + \tilde{\eta}_{r,s}^{n-1/2} \\ + 2i\lambda_x \sin \omega_x (\tilde{M}_{r,s}^{n+1} - \tilde{M}_{r,s}^n) \\ + 2i\lambda_y \sin \omega_y (\tilde{N}_{r,s}^{n+1} - \tilde{N}_{r,s}^n) = 0 \end{aligned} \quad (24)$$

式(17)、(20)を使い上式から $(\tilde{M}_{r,s}^{n+1} - \tilde{M}_{r,s}^n)$ および $(\tilde{N}_{r,s}^{n+1} - \tilde{N}_{r,s}^n)$ を消去すると、以下の常差分方程式を得る。

$$\tilde{\eta}_{r,s}^{n+\frac{3}{2}} - 2(1-2G)\tilde{\eta}_{r,s}^{n+\frac{1}{2}} + \tilde{\eta}_{r,s}^{n-\frac{1}{2}} = 0 \quad (25)$$

$$G = \frac{A'_y}{A_x} K_x^2 \sin^2 \omega_x + \frac{A'_x}{A_y} K_y^2 \sin^2 \omega_y \quad (26)$$

ここで、 $K_x = c_0 \lambda_x$ 、 $K_y = c_0 \lambda_y$ である。

一般的に、

$$f^{n+2} - 2(1-2a)f^{n+1} + f^n = 0 \quad (27)$$

の形の差分方程式は、 $0 < a < 1$ とき増幅も減衰しない周期解 $e^{\pm in\theta}$ をもつ。ただし、 $\theta = \cos^{-1}(1-2a) = 2\sin^{-1}\sqrt{a}$ である。

したがって、進行波解を取り上げ、 $e^{-in\theta} = e^{-ikcn\Delta t}$ 、 $k^2 = k_x^2 + k_y^2$ とおくと、

$$c = \frac{\theta}{k\Delta t} = \frac{c_0\theta}{2\sqrt{(\omega_x K_x)^2 + (\omega_y K_y)^2}} \quad (28)$$

と表すことができるので、波速は次式で与えられる。

$$\frac{c}{c_0} = \frac{\sin^{-1} \sqrt{G}}{\sqrt{(\omega_x K_x)^2 + (\omega_y K_y)^2}} \quad (29)$$

### (3) Leap-Frog 法

式 (1), (2), (3) を, Staggered 配置の空間格子を用いて時間発展に Leap-Frog 法を用いる, 津波数値計算によく使われる方法で差分化すると, 連続の式は式 (4) と同じで, 運動の式は以下ようになる。

$$\begin{aligned} & [M_{j+\frac{1}{2},\ell}^{n+1} - M_{j+\frac{1}{2},\ell}^n] + c_0^2 \lambda_x [\eta_{j+1,\ell}^{n+\frac{1}{2}} - \eta_{j,\ell}^{n+\frac{1}{2}}] \\ &= \frac{H_x^2}{3} \left[ (M_{j+\frac{1}{2},\ell}^{n+1} - 2M_{j+\frac{1}{2},\ell}^{n+1} + M_{j-\frac{1}{2},\ell}^{n+1}) \right. \\ &\quad \left. - (M_{j+\frac{3}{2},\ell}^n - 2M_{j+\frac{1}{2},\ell}^n + M_{j-\frac{1}{2},\ell}^n) \right] \\ &+ \frac{H_x H_y}{3} \left[ (N_{j+1,\ell+\frac{1}{2}}^{n+1} - N_{j+1,\ell-\frac{1}{2}}^{n+1} - N_{j,\ell+\frac{1}{2}}^{n+1} \right. \\ &\quad \left. + N_{j,\ell-\frac{1}{2}}^{n+1}) - (N_{j+1,\ell+\frac{1}{2}}^n - N_{j+1,\ell-\frac{1}{2}}^n \right. \\ &\quad \left. - N_{j,\ell+\frac{1}{2}}^n + N_{j,\ell-\frac{1}{2}}^n) \right] \quad (30) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & [N_{j,\ell+\frac{1}{2}}^{n+1} - N_{j,\ell+\frac{1}{2}}^n] + c_0^2 \lambda_y [\eta_{j,\ell+1}^{n+\frac{1}{2}} - \eta_{j,\ell}^{n+\frac{1}{2}}] \\ &= \frac{H_y^2}{3} \left[ (N_{j,\ell+\frac{1}{2}}^{n+1} - 2N_{j,\ell+\frac{1}{2}}^{n+1} + N_{j,\ell-\frac{1}{2}}^{n+1}) \right. \\ &\quad \left. - (N_{j,\ell+\frac{3}{2}}^n - 2N_{j,\ell+\frac{1}{2}}^n + N_{j,\ell-\frac{1}{2}}^n) \right] \\ &+ \frac{H_x H_y}{3} \left[ (M_{j+\frac{1}{2},\ell+1}^{n+1} - M_{j+\frac{1}{2},\ell}^{n+1} - M_{j-\frac{1}{2},\ell+1}^{n+1} \right. \\ &\quad \left. + M_{j-\frac{1}{2},\ell}^{n+1}) - (M_{j+\frac{1}{2},\ell+1}^n - M_{j+\frac{1}{2},\ell}^n \right. \\ &\quad \left. - M_{j-\frac{1}{2},\ell+1}^n + M_{j-\frac{1}{2},\ell}^n) \right] \quad (31) \end{aligned}$$

この方法は, 佐山ら (1987), 後藤ら (1988) などが採用した手法であり, 運動の式 (30), (31) を連立して陰解法で解くことになる。上記の差分方程式の厳密解は佐山ら (1987) によってすでに求められているから, 本来, ここで解を誘導する必要はない。しかし, 解法の説明のため, 改めて厳密解を求めることにする。

さて, 各計算値をフーリエ係数で表すと, 連続の式から式 (10), 運動の式から以下の式

が得られる。

$$A_x (\tilde{M}_{r,s}^{n+1} - \tilde{M}_{r,s}^n) + B (\tilde{N}_{r,s}^{n+1} - \tilde{N}_{r,s}^n) + 2ic_0^2 \lambda_x \sin \omega_x \tilde{\eta}_{r,s}^{n+1/2} = 0 \quad (32)$$

$$B (\tilde{M}_{r,s}^{n+1} - \tilde{M}_{r,s}^n) + A_y (\tilde{N}_{r,s}^{n+1} - \tilde{N}_{r,s}^n) + 2ic_0^2 \lambda_y \sin \omega_y \tilde{\eta}_{r,s}^{n+1/2} = 0 \quad (33)$$

$$B = \frac{4}{3} H_x H_y \sin \omega_x \sin \omega_y \quad (34)$$

ここで, 式 (32), (33) を  $(\tilde{M}_{r,s}^{n+1} - \tilde{M}_{r,s}^n)$  と  $(\tilde{N}_{r,s}^{n+1} - \tilde{N}_{r,s}^n)$  の連立方程式と見なすと, 容易に次式が得られる。

$$\tilde{M}_{r,s}^{n+1} - \tilde{M}_{r,s}^n = -\frac{2ic_0^2 \lambda_x \sin \omega_x}{D} \tilde{\eta}_{r,s}^{n+1/2} \quad (35)$$

$$\tilde{N}_{r,s}^{n+1} - \tilde{N}_{r,s}^n = -\frac{2ic_0^2 \lambda_y \sin \omega_y}{D} \tilde{\eta}_{r,s}^{n+1/2} \quad (36)$$

ただし,  $D$  は次式で表される。

$$\begin{aligned} D &= A_x A_y - B^2 \\ &= 1 + \frac{4}{3} (H_x^2 \sin^2 \omega_x + H_y^2 \sin^2 \omega_y) \quad (37) \end{aligned}$$

式 (24) に式 (35), (36) を代入すると, 以下の常差分方程式を得る。

$$\tilde{\eta}_{r,s}^{n+3/2} - 2(1-2F)\tilde{\eta}_{r,s}^{n+1/2} + \tilde{\eta}_{r,s}^{n-1/2} = 0 \quad (38)$$

ただし,  $F$  は次式で表される。

$$F = (K_x^2 \sin^2 \omega_x + K_y^2 \sin^2 \omega_y) / D \quad (39)$$

したがって, 波速は次式で与えられる。

$$\frac{c}{c_0} = \frac{\sin^{-1} \sqrt{F}}{\sqrt{(\omega_x K_x)^2 + (\omega_y K_y)^2}} \quad (40)$$

表現は多少異なるものの, 上式は佐山ら (1987) の結果と等価である。

### (4) Crank-Nicholson 法

空間的な格子配置には Staggered 格子を使用し, 時間発展に Crank-Nicholson 法を使用する完全陰解法を用いた場合, 連続の式および運動の式は以下のように差分化される。

$$\begin{aligned}
& [\eta_{j,\ell}^{n+1} - \eta_{j,\ell}^n] + \\
& \frac{\lambda_x}{2} [M_{j+\frac{1}{2},\ell}^{n+1} - M_{j-\frac{1}{2},\ell}^{n+1} + M_{j+\frac{1}{2},\ell}^n - M_{j-\frac{1}{2},\ell}^n] + \\
& \frac{\lambda_y}{2} [N_{j,\ell+\frac{1}{2}}^{n+1} - N_{j,\ell-\frac{1}{2}}^{n+1} + N_{j,\ell+\frac{1}{2}}^n - N_{j,\ell-\frac{1}{2}}^n] = 0 \quad (41)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& [M_{j+\frac{1}{2},\ell}^{n+1} - M_{j+\frac{1}{2},\ell}^n] + \\
& \frac{c_0^2 \lambda_x}{2} [\eta_{j+1,\ell}^{n+1} - \eta_{j,\ell}^{n+1} + \eta_{j+1,\ell}^n - \eta_{j,\ell}^n] \\
& = \frac{H_x^2}{3} \left[ (M_{j+\frac{3}{2},\ell}^{n+1} - 2M_{j+\frac{1}{2},\ell}^{n+1} + M_{j-\frac{1}{2},\ell}^{n+1}) \right. \\
& \quad \left. - (M_{j+\frac{3}{2},\ell}^n - 2M_{j+\frac{1}{2},\ell}^n + M_{j-\frac{1}{2},\ell}^n) \right] \\
& + \frac{H_x H_y}{3} \left[ (N_{j+1,\ell+\frac{1}{2}}^{n+1} - N_{j+1,\ell-\frac{1}{2}}^{n+1} - N_{j,\ell+\frac{1}{2}}^{n+1} \right. \\
& \quad \left. + N_{j,\ell-\frac{1}{2}}^{n+1}) - (N_{j+1,\ell+\frac{1}{2}}^n - N_{j+1,\ell-\frac{1}{2}}^n - N_{j,\ell+\frac{1}{2}}^n \right. \\
& \quad \left. - N_{j,\ell-\frac{1}{2}}^n + N_{j,\ell-\frac{1}{2}}^n) \right] \quad (42)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& [N_{j,\ell+\frac{1}{2}}^{n+1} - N_{j,\ell+\frac{1}{2}}^n] + \\
& \frac{c_0^2 \lambda_y}{2} [\eta_{j,\ell+1}^{n+1} - \eta_{j,\ell}^{n+1} + \eta_{j,\ell+1}^n - \eta_{j,\ell}^n] \\
& = \frac{H_y^2}{3} \left[ (N_{j,\ell+\frac{3}{2}}^{n+1} - 2N_{j,\ell+\frac{1}{2}}^{n+1} + N_{j,\ell-\frac{1}{2}}^{n+1}) \right. \\
& \quad \left. - (N_{j,\ell+\frac{3}{2}}^n - 2N_{j,\ell+\frac{1}{2}}^n + N_{j,\ell-\frac{1}{2}}^n) \right] \\
& + \frac{H_x H_y}{3} \left[ (M_{j+\frac{1}{2},\ell+1}^{n+1} - M_{j+\frac{1}{2},\ell}^{n+1} - M_{j-\frac{1}{2},\ell+1}^{n+1} \right. \\
& \quad \left. + M_{j-\frac{1}{2},\ell}^{n+1}) - (M_{j+\frac{1}{2},\ell+1}^n - M_{j+\frac{1}{2},\ell}^n - M_{j-\frac{1}{2},\ell+1}^n \right. \\
& \quad \left. - M_{j-\frac{1}{2},\ell+1}^n + M_{j-\frac{1}{2},\ell}^n) \right] \quad (43)
\end{aligned}$$

この場合、式(41)、(42)、(43)を連立して陰的に解くことになる。上式に式(9)を代入すると、以下の関係を得る。

$$\begin{aligned}
& \bar{\eta}_{r,s}^{n+1} - \bar{\eta}_{r,s}^n + i\lambda_x \sin \omega_x (\bar{M}_{r,s}^{n+1} + \bar{M}_{r,s}^n) \\
& + i\lambda_y \sin \omega_y (\bar{N}_{r,s}^{n+1} + \bar{N}_{r,s}^n) = 0 \quad (44)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& A_x (\bar{M}_{r,s}^{n+1} - \bar{M}_{r,s}^n) + B (\bar{N}_{r,s}^{n+1} - \bar{N}_{r,s}^n) \\
& + ic_0^2 \lambda_x \sin \omega_x (\bar{\eta}_{r,s}^{n+1} + \bar{\eta}_{r,s}^n) = 0 \quad (45)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& B (\bar{M}_{r,s}^{n+1} - \bar{M}_{r,s}^n) + A_y (\bar{N}_{r,s}^{n+1} - \bar{N}_{r,s}^n) \\
& + ic_0^2 \lambda_y \sin \omega_y (\bar{\eta}_{r,s}^{n+1} + \bar{\eta}_{r,s}^n) = 0 \quad (46)
\end{aligned}$$

式(45)、(46)から、次式が得られる。

$$\begin{aligned}
& \bar{M}_{r,s}^{n+1} - \bar{M}_{r,s}^n = -\frac{ic_0^2 \lambda_x \sin \omega_x}{D} (\bar{\eta}_{r,s}^{n+1} + \bar{\eta}_{r,s}^n) \\
& \quad (47)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \bar{N}_{r,s}^{n+1} - \bar{N}_{r,s}^n = -\frac{ic_0^2 \lambda_y \sin \omega_y}{D} (\bar{\eta}_{r,s}^{n+1} + \bar{\eta}_{r,s}^n) \\
& \quad (48)
\end{aligned}$$

また、連続の式(44)は、 $n$ を $n+1$ に置き換えても成立するから、次式が求められる。

$$\begin{aligned}
& \bar{\eta}_{r,s}^{n+2} - 2\bar{\eta}_{r,s}^{n+1} + \bar{\eta}_{r,s}^n + i\lambda_x \sin \omega_x (\bar{M}_{r,s}^{n+2} - \bar{M}_{r,s}^n) \\
& + i\lambda_y \sin \omega_y (\bar{N}_{r,s}^{n+2} - \bar{N}_{r,s}^n) = 0 \quad (49)
\end{aligned}$$

ここで、式(47)、(48)も $n$ を $n+1$ に置き換えられることに注意して $(\bar{M}_{r,s}^{n+2} - \bar{M}_{r,s}^n)$ および $(\bar{N}_{r,s}^{n+2} - \bar{N}_{r,s}^n)$ を求め、上式に代入することにより、以下の常差分方程式を得る。

$$\begin{aligned}
& (1+F)\bar{\eta}_{r,s}^{n+2} - 2(1-F)\bar{\eta}_{r,s}^{n+1} \\
& + (1+F)\bar{\eta}_{r,s}^n = 0 \quad (50)
\end{aligned}$$

ただし、 $F$ は式(39)で定義される量と同一である。

一般に、常差分方程式

$$\begin{aligned}
& (1+a)f^{n+2} - 2(1-a)f^{n+1} + (1+a)f^n = 0 \\
& \quad (51)
\end{aligned}$$

は $a > 0$ なら周期解 $e^{\pm in\theta}$ をもち、 $\theta = \cos^{-1} \frac{1-a}{1+a}$ である。すなわち、Crank-Nicholson法はつねに安定で、波速は次式で与えられる。

$$\frac{c}{c_0} = \frac{\cos^{-1} \frac{1-F}{1+F}}{2\sqrt{(\omega_x K_x)^2 + (\omega_y K_y)^2}} \quad (52)$$

### 3. 各スキームの分散特性

まず、各スキームの分散特性の方向依存性を示すため、クーラン数 $K_x = K_y = 0.5$ 、水深格子比 $H_x = H_y = 0.5$ として、各スキームの波速 $c/c_0$ を図1から図3に示す。図の曲

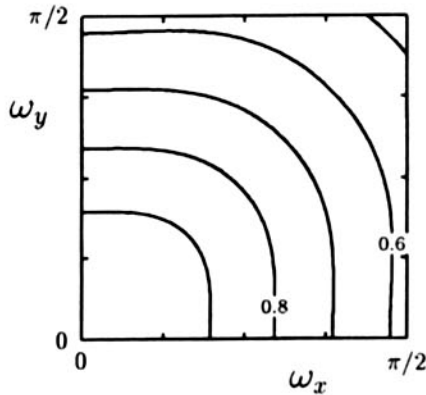


図-1 2段階混合差分法の波速  $c/c_0$   
( $K_x = K_y = 0.5$ ,  $H_x = H_y = 0.5$ )

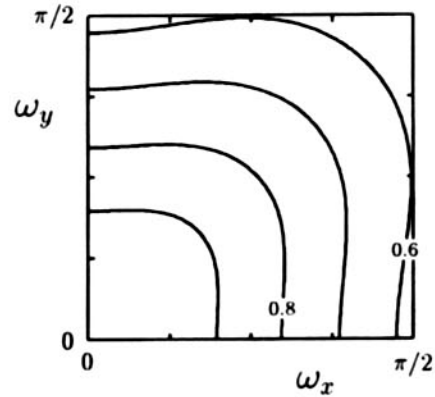


図-2 Leap-Frog法の波速  $c/c_0$   
( $K_x = K_y = 0.5$ ,  $H_x = H_y = 0.5$ )

線が同心円状になれば、方向依存性が少ないと言える。なお、 $\omega_x, \omega_y = \pi/2$ が数値計算で表現できるもっとも波長が短い成分（ナイキスト波数成分、波長はそれぞれ  $2\Delta x, 2\Delta y$ ）を表す。 $\omega_x, \omega_y = \pi/4$ はその2倍の波長をもつ成分である。原点付近は、非常に波長の長い成分である。図から、原点に近いほど（波長が長いほど） $c/c_0$ が1に近づき、原点から遠ざかるほど（波長が短くなるほど）波速が遅くなるのが分かる。これによって波数分散が起こる。図から、Leap-Frog法は比較的方向依存性が強いことが分かる。

次に、数値誤差の大きさを示すため、同じ条件において、支配方程式（式（1）、（2）、（3））の理論波速

$$\frac{c_b}{c_0} = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{(kh)^2}{3}}} \quad (53)$$

を真値として各スキームの誤差を評価した結果を図4から図6に示す。実際の数値計算では、図の原点付近にエネルギーが集中しているはずだから、原点付近で誤差が小さいことがこれらのスキームを実用に供する上での最低条件である。図から、どのスキームでも原点付近では誤差が小さくなる傾向があることが分かる。また、波速はどの成分波に対しても過小評価だが、座標軸方向に進む波は過小評価の度合いが高く、座標軸の斜め方向に進む波は過小評価量の度合いが低い。これは、座

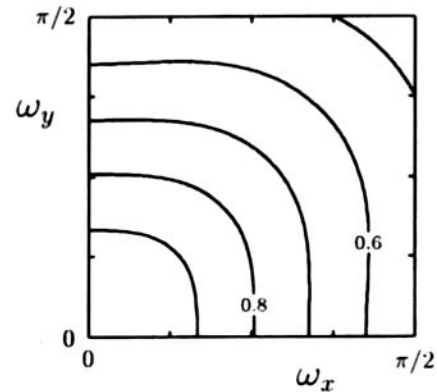


図-3 Crank-Nicholson法の波速  $c/c_0$   
( $K_x = K_y = 0.5$ ,  $H_x = H_y = 0.5$ )

標軸方向に進む波に対して分散効果がより過大評価されることを意味する。ここで取り上げた3種類のスキームすべてが同様の傾向を持つが、特にLeap-Frog法はこの傾向が顕著である。ただし、Leap-Frog法では方向依存性は強いが、数値誤差の大きさ自体はそれほど大きくない。一方、Crank-Nicholson法（図3、6）は方向依存性に関しては優れているが、誤差そのものは比較的大きいことが分かる。2段階混合差分法は、誤差の大きさはLeap-Frog法とはほぼ同じで、方向依存性に関してはLeap-Frog法より若干優れている。したがって、2段階混合差分法がもっとも計算時間が短いことも考え合わせると、3種類のスキームの中で2段階混合差分法がもっとも

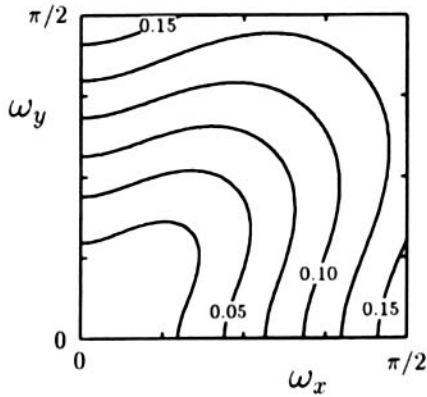


図-4 2段階混合差分法の波速に関する数値誤差  $(c_b - c) / c_0$  ( $K_x = K_y = 0.5$ ,  $H_x = H_y = 0.5$ )

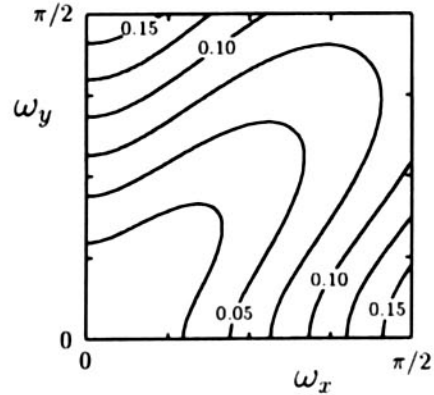


図-5 Leap-Frog法の波速に関する数値誤差  $(c_b - c) / c_0$  ( $K_x = K_y = 0.5$ ,  $H_x = H_y = 0.5$ )

実用的で精度の点からも優れていると言える。

なお、ここでは数値誤差特性の把握のため、支配方程式の理論波速を真値として議論を行ったが、分散性に関してより精度の高い微小振幅波理論の波速を真値にとる考え方もある(例えば、佐山ら(1987))。線形分散波式(1)、(2)、(3)の波速は微小振幅波の波速より小さく(例えば、岩瀬ら(2002))、数値計算上の波速はさらに小さいから、微小振幅波理論を基準に誤差を評価すると、図4などに示した結果より誤差は大きくなる。

次に、実用的な計算を想定し、 $K_x = 0.2$ ,  $K_y = 0.4$ ,  $H_x = 0.4$ ,  $H_y = 0.8$ の場合の各スキームの波速  $c/c_0$  および誤差  $(c_b - c) / c_0$  を図7から図12に示す。これらは、後藤ら(1988)が検討に使用した数値であり、太平洋の平均水深を4000m、格子間隔を  $\Delta x = 10$  km (緯度約5分に相当)、 $\Delta y = 5$  km、時間間隔  $\Delta t = 10$  s程度に設定したことに相当する。

図から、2段階混合差分法では  $y$  軸方向のナイキスト波数 ( $\omega_y = \pi/2$ ) 近辺で Leap-Frog 法、Crank-Nicholson 法と異なる傾向があるが、その他の領域では今までの検討とはほぼ同様の結果が得られていることが分かる。すなわち、2段階混合差分法の数値誤差は Leap-Frog 法と同程度で、Crank-Nicholson 法の誤差はそれより大きい。したがって、2段階混合差分法を使用すると短い計算時間で

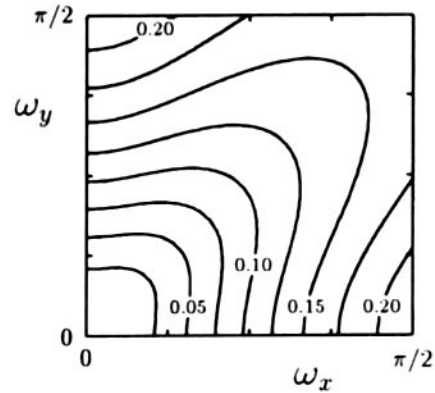


図-6 Crank-Nicholson法の波速に関する数値誤差  $(c_b - c) / c_0$  ( $K_x = K_y = 0.5$ ,  $H_x = H_y = 0.5$ )

高精度の計算結果を得ることが可能である。今のところ、2段階混合差分法は主として遡上を含んだ1次元問題に適用されているが、平面2次元計算に関しても実用性という面で優れた手法と言える。

#### 4. 各スキームの安定条件

常差分方程式(27)は  $0 < a < 1$  のときに発散も減衰もしない周期解をもつ。しかし、 $a$  がこの範囲にない場合、時間とともに増大する解が現れる。したがって、差分式がこの常差分方程式に帰着する Leap-Frog 法と2段

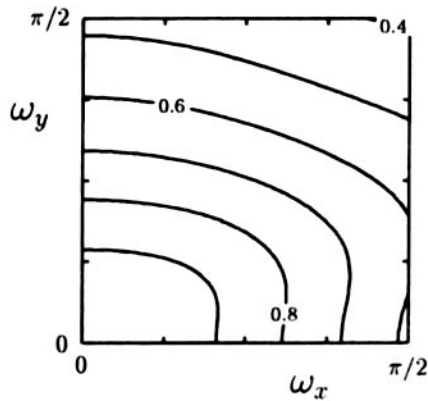


図-7 2段階混合差分法の波速  $c/c_0$  ( $Kx = 0.2$ ,  $Ky = 0.4$ ,  $Hx = 0.4$ ,  $Hy = 0.8$ )

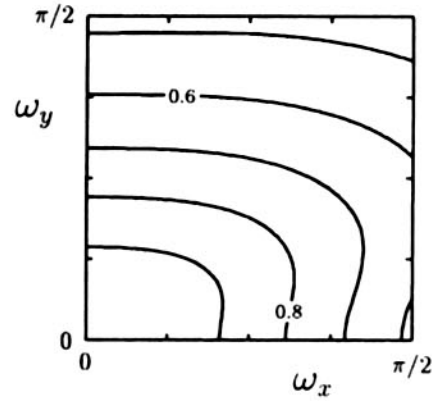


図-8 Leap-Frog法の波速  $c/c_0$  ( $Kx = 0.2$ ,  $Ky = 0.4$ ,  $Hx = 0.4$ ,  $Hy = 0.8$ )

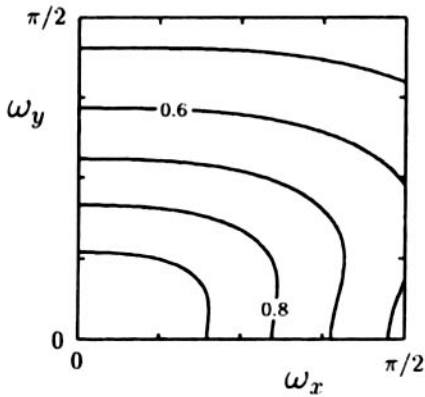


図-9 Crank-Nicholson法の波速  $c/c_0$  ( $Kx = 0.2$ ,  $Ky = 0.4$ ,  $Hx = 0.4$ ,  $Hy = 0.8$ )

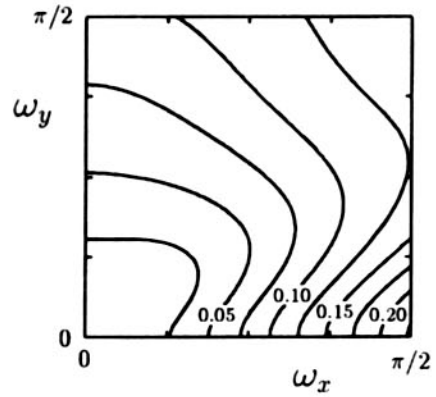


図-10 2段階混合差分法の波速に関する数値誤差  $(c_b - c)/c_0$  ( $Kx = 0.2$ ,  $Ky = 0.4$ ,  $Hx = 0.4$ ,  $Hy = 0.8$ )

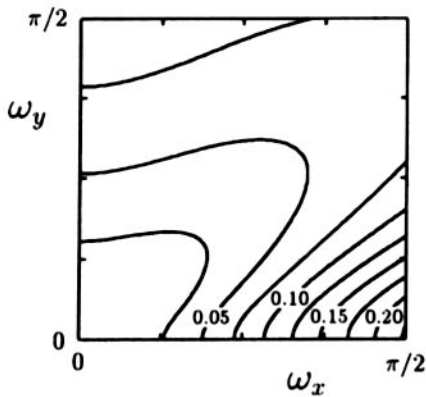


図-11 Leap-Frog法の波速に関する数値誤差  $(c_b - c)/c_0$  ( $Kx = 0.2$ ,  $Ky = 0.4$ ,  $Hx = 0.4$ ,  $Hy = 0.8$ )

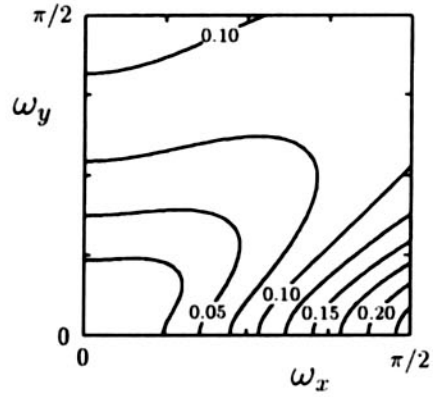


図-12 Crank-Nicholson法の波速に関する数値誤差  $(c_b - c)/c_0$  ( $Kx = 0.2$ ,  $Ky = 0.4$ ,  $Hx = 0.4$ ,  $Hy = 0.8$ )



階混合差分法には安定条件が存在する。

Leap-Frog 法では  $a = F$  である。ただし、 $F > 0$  はつねに満たされるから、 $F < 1$  が安定条件となる<sup>1</sup>。1次元の場合、安定条件として次式を得る。

$$K_x^2 < 1 + \frac{4}{3}H_x^2, \quad H_x = \frac{h}{\Delta x} \quad (54)$$

2次元の場合、 $\Delta x = \Delta y$  とすると次式が安定条件として得られる。

$$K_x^2 < \frac{1}{2} \left( 1 + \frac{8}{3}H_x^2 \right) \quad (55)$$

2段階混合差分法でも、1次元問題の場合は Leap-Frog 法と実質的に同じなので、安定条件は式 (54) で与えられる。一方、2次元の場合、格子の選び方によって  $A'_x$  や  $A'_y$  が負になる、すなわち  $G < 0$  になる可能性があるため、安定条件が複雑になる。簡単のため、 $\Delta x = \Delta y$  とする。まず、 $G > 0$  から、以下の条件が得られる。

$$\frac{4}{3}H_x^2 < 1 \quad (56)$$

次に、 $G < 1$  からは、以下の条件が得られる。

$$\frac{4}{3}H_x^2 < \sqrt{2} - 1 \text{ のとき } K_x^2 < \frac{1}{2} \cdot \frac{1 + \frac{4}{3}H_x^2}{1 - \frac{4}{3}H_x^2} \quad (57)$$

$$\frac{4}{3}H_x^2 > \sqrt{2} - 1 \text{ のとき } K_x^2 < \frac{3 + 2\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{4}{3}H_x^2 \quad (58)$$

Leap-Frog 法でも、2段階混合差分法でも、 $F < 1$ 、 $G < 1$  に対応した安定条件はクーラン数を規定しており、どちらのスキームの場合も  $K_x = 0.7$  にしておけばすべての  $H_x$  に対して安定である。しかし、 $G > 0$  に対応した式

<sup>1</sup> 多くの場合、安定条件として  $F \leq 1$  が使われている。これは、解が指数関数的に発散しないための条件である。しかし、 $F = 1$  の場合、直線的に発散する解が現れる可能性がある。

(56) は空間格子間隔の下限を規定しており、 $\Delta x$  が  $1.15h$  より小さく設定できないことを意味する。実用計算ではあまり問題にならないと思われるが、2段階混合差分法を平面2次元問題に適用する場合にはこのような制限があることに注意する必要がある。

なお、Crank-Nicholson 法の場合、 $F > 0$  なら周期解が得られ、この条件はつねに満たされるから、無条件で安定である。

## 5. おわりに

Leap-Frog 法、Crank-Nicholson 法、2段階混合差分法に関し、差分方程式の厳密解を求めた。理論波速と比較した誤差の大きさ、方向依存性などの性質を調べた結果、実用的な格子間隔を設定する場合には2段階混合差分法を使用することにより短い計算時間で精度の良い解を求めることができることがわかった。今のところ、2段階混合差分法は主として遡上を含んだ1次元問題に適用されているが、遠地津波の実用計算にも適していると言える。

## 6. 追記

本報告は、後藤教授の遺稿をもとに防衛大学校建設環境工学科・藤間功司が取りまとめたものである。理論解はすべて後藤教授の導出による。安定条件に関する議論は、藤間の判断で加えた。

## 参考文献

- 今村文彦, 後藤智明 (1986): 差分法による津波数値計算の打ち切り誤差, 土木学会論文集, No. 375/II-6, pp.241-250.
- 岩瀬浩之, 見上敏文, 後藤智明, 藤間功司 (2002): 津波の伝播計算を対象とした非線形分散長波式の比較, 土木学会論文集, No. 705/II-59, pp.129-138.
- 後藤智明, 今村文彦, 首藤伸夫 (1988): 遠地津波の数値計算に関する研究 その1 支

- 配方程式と差分格子間隔, 地震, 第2輯, 第41巻, pp.515-526.
- 佐山順二, 今村文彦, 後藤智明, 首藤伸夫 (1987): 外海域における津波の高精度計算法に関する検討, 海岸工学講演会論文集, No. 34, pp.177-181.
- 長谷川賢一, 鈴木孝夫, 稲垣和男, 首藤伸夫 (1987): 津波の数値実験における格子間隔と時間積分間隔に関する研究, 土木学会論文集, No. 381/II-7, pp.111-120.
- 原信彦, 岩瀬浩之, 後藤智明 (1998): 非線形分散波理論式に関する多段階混合差分スキームの提案, 海岸工学論文集, No. 45, pp.26-30.
- 藤間功司, 正村憲史, 林建二郎, 重村利幸, 後藤智明 (1998): Leap-Frog法を用いた島周辺の津波数値計算における格子間隔選定基準, 土木学会論文集, No. 593/II-43, pp.183-188.